Möglichkeiten zur Berechnung von komplexen Integralen

Umlaufzahl: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve und $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{im}(\gamma)$.

- Die Umlaufzahl (Windungszahl) von γ in z_0 ist definiert als

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

Cauchy-Integralsatz: $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

- Sind γ_1 und γ_2 Wege in U, die in U zueinander homotop/schleifenhomotop sind, dann gilt

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz$$

- Ist γ ein geschlossener Weg in U, nullhomolog in U, dann ist

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Cauchy-Integralformel:

- Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\partial B_r(a)$ ein geschlossener Weg in U, nullhomolog in U, der jeden Punkt 1 Mal umläuft. Zudem ist $\overline{B_r(a)} \subseteq U$, dann gilt für jeden Punkt $z \in B_r(a)$ und jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi$$

Verallgemeinerte Cauchy-Integralformel:

- Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg, nullhomolog in U, $z \in \mathbb{C} \backslash \mathrm{im}(\gamma)$ sowie $k \in \mathbb{N}$ dann gilt

$$\frac{n(\gamma, z)}{k!} f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi$$

Residuum:

- Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität hat. Das **Residuum** von f an der Stelle a ist definiert als
$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{B_r(a)} f(z)dz$$
wobei der Radius $r > 0$ des Weges so klein gewählt ist, dass a die einzige Singularität in der Menge $B_r(a)$ ist.

  Das Residuum ist in einer Laurentreihe der Koeffizient von z^{-1}, also
$$\operatorname{Res}(f,a) = a_{-1}$$

Residuensatz:

- Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $S \subseteq U$ eine Menge ohne Häufungspunkte (diskret) und $f : U \backslash S \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $\gamma : [a,b] \to U \backslash S$ ein geschlossener, in U nullhomologer Weg, mit
$$U = \underbrace{(U\backslash S)}_{\substack{\text{Definitions-}\\ \text{bereich}\\ \text{von } f}} \cup \underbrace{S}_{\substack{\text{Menge der}\\ \text{isolierten}\\ \text{Singularitäten}\\ \text{von } f}}$$
$$\Rightarrow \int\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{s \in S} n(\gamma, s) \operatorname{Res}(f,s)$$