

**Herbst 25 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

- a) Für eine stetige Funktion $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ von Funktionen $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = f\left(\frac{nx+1}{n+1}\right).$$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \geq 1}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

- b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\sqrt{\cdot} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ stetig aber nicht Lipschitz-stetig ist. Sie dürfen dabei die für alle reellen $x, x_0 \geq 0$ gültige Ungleichung $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \sqrt{|x - x_0|}$ benutzen.
- c) Geben Sie ein Beispiel an für eine Folge $(g_n)_{n \geq 1}$ Lipschitz-stetiger Funktionen $g_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine nicht Lipschitz-stetige Funktion $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

Lösungsvorschlag:

- a) Wir überlegen uns zunächst Wohldefiniertheit von f_n . Der Nenner $n+1$ verschwindet für kein n und es gilt $0 \leq \frac{nx+1}{n+1} \leq \frac{n \cdot 1 + 1}{n+1} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$, also ist die Verkettung wohldefiniert, da $\frac{nx+1}{n+1} \in [0,1]$ ist.

Es gilt $|\frac{nx+1}{n+1} - x| = |\frac{1-x}{n+1}| \leq \frac{|1-x|}{n+1} \leq \frac{2}{n+1}$. Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ ist, ist f sogar gleichmäßig stetig, es gibt also ein $\delta > 0$ mit $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sei $N := \lceil \frac{2}{\delta} \rceil$, dann gilt für $n \geq N$, dass $|\frac{nx+1}{n+1} - x| \leq \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N+1} < \frac{2}{\delta} = \delta$. Also folgt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ und $x \in [0,1]$, dass $|f(x) - f_n(x)| = |f(x) - f(\frac{nx+1}{n+1})| < \varepsilon$ aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f . Per Definitionem konvergiert f_n gleichmäßig gegen f .

- b) Sei $x_0 \in [0,1]$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta := \varepsilon^2$, dann gilt für alle $x \in [0,1]$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \sqrt{|x - x_0|} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$ mit der Monotonie der Wurzel. Also ist die Funktion stetig in x_0 und da x_0 beliebig in $[0,1]$ gewählt war, sogar stetig auf $[0,1]$.

Sie ist nicht Lipschitz-stetig. Gäbe es ein $L > 0$ mit $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in [0,1]$, so würde für $x_0 \in (0,1)$ insbesondere $\frac{1}{2\sqrt{x_0}} = |\sqrt{\cdot}'(x_0)| = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \leq \lim_{x \rightarrow x_0} L = L$ folgen. Dies ist für $x_0 := \frac{1}{4L}$ aber nicht erfüllt, da $2L > L$ ist.

- c) Wir zeigen, dass $g_n := \sqrt{\frac{nx+1}{n+1}}$ Lipschitz-stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, dann folgt die Aussage aus a) und b).

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist g_n stetig differenzierbar auf $[0,1]$ (man beachte, dass das Argument stets positiv ist und ebenso $g_n(x)$) mit $g_n'(x) = \frac{n}{2(n+1)g_n(x)}$. Da g_n' stetig auf $[0,1]$ ist, ist die Funktion auch beschränkt gegen ein $L_n > 0$. Nach dem Mittelwertsatz gilt für $0 \leq x < y \leq 1$, dass ein $z \in (x, y)$ existiert mit $\frac{g_n(y) - g_n(x)}{y - x} = g_n'(z)$, also ist $|g_n(x) - g_n(y)| = |g_n(y) - g_n(x)| \leq |g_n'(z)||y - x| \leq L_n|y - x| = L_n|x - y|$ für alle $x, y \in [0,1]$ mit $x \neq y$. Für $x = y$ ist $|f(x) - f(y)| = 0 \leq L_n \cdot 0 = L_n|x - y|$ klar.

J.F.B.