

**Herbst 25 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben sei die 3×3 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie für das lineare Differentialgleichungssystem $x'(t) = Ax(t)$ diejenige Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\Phi(0)$ die Identitätsmatrix in $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist.

b) Geben Sie alle $a \in \mathbb{R}^3$ an, für die die Lösung $x_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = a$$

periodisch ist.

Lösungsvorschlag:

a) Es gilt natürlich $\Phi(t) = \exp(tA)$, was wir mit der Definition berechnen wollen. Es

gilt $A^2 = \begin{pmatrix} (-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und somit $A^{2n} = \begin{pmatrix} (-2)^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ sowie

$A^{2n+1} = \begin{pmatrix} (-2)^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \\ 0 & -(-1)^n & 0 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} A^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1} A^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (-2)^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ 0 & -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Es gilt $x_a(t) = \exp(tA)a = \begin{pmatrix} a_1 e^{-2t} \\ a_2 \cos(t) + a_3 \sin(t) \\ a_3 \cos(t) - a_2 \sin(t) \end{pmatrix}$, was natürlich genau für $a_1 = 0$ periodisch ist. Die gesuchten a sind also die Elemente von $\{(0, x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

J.F.B.