

**Herbst 25 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Wir betrachten Lösungen $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ des linearen Anfangswertproblems (AWP)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + v, \quad x(0) = x_0$$

für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, Inhomogenität $v \in \mathbb{R}^2$ (unabhängig von der Zeit), und Anfangsdatum $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

Begründen Sie jeweils, warum die folgenden Aussagen nicht für alle A wahr sind:

- a) Sind die Lösungen des homogenen AWP (also $v = 0$) für alle x_0 auf $[0, \infty)$ beschränkt, dann sind auch die Lösungen des inhomogenen AWP mit beliebigen v und x_0 auf $[0, \infty)$ beschränkt.
- b) Gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ für die Lösungen des homogenen AWP für alle x_0 , dann gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ auch für alle Lösungen des inhomogenen AWP mit beliebigen v und x_0 .
- c) Besitzt das homogene AWP für ein geeignetes x_0 eine auf $[0, \infty)$ unbeschränkte Lösung, dann ist jede Lösung des inhomogenen AWP zu diesem Anfangswert x_0 mit beliebigem $v \in \mathbb{R}^2$ unbeschränkt auf $[0, \infty)$.

Lösungsvorschlag:

- a) Als Gegenbeispiel wählen wir $A = 0_{2 \times 2}$ und $v \neq 0$ beliebig. Die Lösungen des homogenen Problems, sind genau die konstanten Funktionen $x(t) \equiv x_0$, die offensichtlich auf $[0, \infty)$ beschränkt sind.
Dagegen ist die Lösung des inhomogenen Problems $x(t) = x_0 + tv$ für $v \neq 0$ stets unbeschränkt auf $[0, \infty)$.
- b) Als Gegenbeispiel wählen wir $A = -\mathbb{1}_2$ und $v \neq 0$ beliebig. Dann ist die Lösung des homogenen Problems durch $x(t) = e^{-t}x_0$ gegeben, was wegen $\|x(t)\| = e^{-t}\|x_0\|$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.
Dagegen konvergiert die Lösung des inhomogenen Problems $x(t) = e^{-t}x_0 + (1 - e^{-t})v$ für $t \rightarrow \infty$ gegen v , also für $v \neq 0$ nicht gegen 0.
- c) Als Gegenbeispiel wählen wir $A = \mathbb{1}_2$, und $v \neq 0$ beliebig, dann ist die Lösung des homogenen Problems $x(t) = e^t x_0$ für $x_0 = v$ unbeschränkt, aber die Lösung des inhomogenen Problems $x(t) \equiv v$ ist offensichtlich beschränkt.

J.F.B.