

**Herbst 25 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Wir betrachten die folgenden fünf offenen Mengen (Halbebene H , erster Quadrant Q , rechter Einheitskreis K , Viertelkreis V und „Pac-Man“ P):

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \quad Q = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad K = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, |z| < 1\}$$

$$V = \{re^{i\phi} \mid r \in (0,1), |\phi| < \pi/4\}, \quad P = \{re^{i\phi} \mid r \in (0,1), |\phi| < 3\pi/4\}.$$

Ziel ist die Konstruktion einer biholomorphen Abbildung $f : H \rightarrow P$.

- a) Geben Sie jeweils eine biholomorphe Abbildung $g_1 : Q \rightarrow H$, $g_2 : V \rightarrow K$ und $g_3 : V \rightarrow P$ an.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass Abbildungen, die holomorph und bijektiv sind, biholomorph sind.

- b) Begründen Sie, dass die Möbius-Transformation $g_4 : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ auf der erweiterten komplexen Zahlenebene $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit

$$g_4(z) = i \frac{z - i}{z + i}$$

die Menge Q biholomorph auf die Menge K abbildet.

- c) Geben Sie eine biholomorphe Abbildung $f : H \rightarrow P$ an, indem Sie diese mithilfe von g_1 bis g_4 ausdrücken.

Lösungsvorschlag:

- a) Wir betrachten $g_1(z) = z^2 = g_2(z)$ und $g_3(z) = z^3$. Offensichtlich sind alle drei Funktionen ganz, wir müssen daher nur zeigen, dass sie bijektiv und wohldefiniert sind, also ihre Definitionsbereiche bijektiv in die Wertebereiche abbilden.

Sei $z = x + iy \in Q$ in Normaldarstellung gegeben, dann ist $g_1(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$, was positiven Imaginärteil besitzt, also gilt $g_1(z) \in H$. Für die Bijektivität, schreiben wir $z = re^{i\phi}$ in Polardarstellung mit $r > 0, 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Dann ist $g_1(re^{i\phi}) = r^2 e^{2i\phi}$ bijektiv mit Inverser $g_1^{-1} : H \rightarrow Q, g_1^{-1}(re^{i\phi}) = \sqrt{r} e^{i\frac{\phi}{2}}$. Für die Wohldefiniertheit der Inversen beachte man $H = \{re^{i\phi} \mid r > 0, 0 < \phi < \pi\}$ und $Q = \{re^{i\phi} \mid r > 0, 0 < \phi < \frac{\pi}{2}\}$.

Als Nächstes schreiben wir $K = \{re^{i\phi} \mid r \in (0,1), |\phi| < \frac{\pi}{2}\}$ und beachten, dass die reellen Funktionen $f(x) = x^2, g(x) = x^3$ die Menge $(0,1)$ bijektiv auf sich selbst abbilden mit Inversen $f^{-1}(x) = \sqrt{x}, g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. Analog schreiben wir $J_1 = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), J_2 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $J_3 = (-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ und stellen fest, dass die Abbildungen

$$j : J_1 \rightarrow J_2, j(x) = 2x, \quad k : J_1 \rightarrow J_3, k(x) = 3x$$

bijektiv sind, mit Inversen

$$j^{-1} : J_2 \rightarrow J_1, j^{-1}(x) = \frac{x}{2}, \quad k^{-1} : J_3 \rightarrow J_1, k^{-1}(x) = \frac{x}{3}.$$

Damit ist sofort klar, dass $g_2(V) \subset K$ gilt und $g_2(re^{i\phi}) = r^2 e^{2i\phi}$ bijektiv mit Inverser $g_2^{-1} : K \rightarrow V, g_2^{-1}(re^{i\phi}) = \sqrt{r} e^{i\frac{\phi}{2}}$ ist, und, dass $g_3(V) \subset P$ gilt und $g_3(re^{i\phi}) = r^3 e^{3i\phi}$ bijektiv mit Inverser $g_3^{-1} : P \rightarrow V, g_3^{-1}(re^{i\phi}) = \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\phi}{3}}$ ist.

- b) Da die Möbius-Transformation nicht degeneriert ist ($i \cdot i - 1 \cdot 1 = -2 \neq 0$), bildet sie $\overline{\mathbb{C}}$ biholomorph auf sich selbst ab. Wir müssen also nur $g_4(Q) = K$ zeigen. Dazu halten wir fest, dass $-i, \infty \notin Q$ sowie $1, \infty \notin K$ gelten.

Wir schreiben $z = x + iy$ in Normaldarstellung und formen äquivalent um:

$$|g_4(z)| < 1 \iff |z-i|^2 < |z+i|^2 \iff x^2 + (y-1)^2 < x^2 + (y+1)^2 \iff -2y < 2y,$$

$$\text{also ist } |g_4(z)| < 1 \iff \operatorname{Im} z > 0.$$

Weiter gilt

$$g_4(z) = i \frac{(z-i)(\bar{z}-i)}{|z+i|^2} = i \frac{-i(z+\bar{z})}{|z+i|^2} + i \frac{z\bar{z}-1}{|z+i|^2} = \frac{2 \operatorname{Re} z}{|z+i|^2} + i \frac{|z|^2-1}{|z+i|^2}$$

$$\text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}. \text{ Also gilt } \operatorname{Re}(g_4(z)) > 0 \iff 2 \operatorname{Re} z > 0 \iff \operatorname{Re} z > 0.$$

Damit folgt

$$g_4(z) \in K \iff |g_4(z)| < 1, \operatorname{Re}(g_4(z)) > 0 \iff \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z > 0 \iff z \in Q,$$

$$\text{also } g_4(Q) = K.$$

- c) Für jede biholomorphe Funktion stellt auch die Inverse eine biholomorphe Funktion dar. Damit können wir $f = g_3 \circ g_2^{-1} \circ g_4 \circ g_1^{-1}$ wählen.

J.F.B.