

**Herbst 25 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

- a) Die Funktion f sei auf $\mathbb{C}$ holomorph bis auf isolierte Singularitäten. Zeigen Sie: Für gerade f , d. h. $f(z) = f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, gilt die Aussage $\text{res}_{-z}f = -\text{res}_zf$, und für ungerade f , d. h. $f(z) = -f(-z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, gilt die Aussage $\text{res}_{-z}f = \text{res}_zf$.
- b) Berechnen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in allen ihren Singularitäten:

$$i) \frac{z}{(z^2 + 1)(z^2 - 1)^2} \qquad ii) \frac{\cos(z)}{(z^2 + 1)^2}$$

Lösungsvorschlag:

- a) Sei $w \in \mathbb{C}$ beliebig, dann existiert eine Laurent-Entwicklung von f um 0 auf einem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - w| < r\}$ für ein $r > 0$ (falls f holomorph in w ist, konvergiert die Potenzreihe sogar in w , das ändert aber nichts an unserer Argumentation), d. h. wir finden $a_k \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$ mit $0 < |z - w| < r \implies f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - w)^k$.

Für gerade f gilt nun $f(z) = f(-z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(-z - w)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(-1)^k(z - (-w))^k$ für $0 < |-z - w| = |z - (-w)| < r$. Wir haben also die Laurent-Entwicklung von f um $-w$ gefunden.

Das Residuum ist der Vorfaktor von z^{-1} , daher gilt $\text{res}_{-w}f = -a_{-1} = -\text{res}_wf$.

Für ungerade f gilt analog $f(z) = -f(-z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(-1)^{k+1}(z - (-w))^k$ und $\text{res}_{-w}f = a_{-1} = \text{res}_wf$.

- b) i) Die Singularitäten sind die Nullstellen des Nenners $(z^2 + 1)(z^2 - 1)^2 = (z - i)(z + i)(z + 1)^2(z - 1)^2$, also ± 1 und $\pm i$. Wegen $\frac{(-z)}{((-z)^2 + 1)((-z)^2 - 1)^2} = -\frac{z}{(z^2 + 1)(z^2 - 1)^2}$ ist die Funktion ungerade und wir können a) benutzen und es genügt die Residuen in 1 und i zu bestimmen.

Bei i handelt es sich um eine einfache Nullstelle des Nenners, aber keine Nullstelle des Zählers, also um einen Pol erster Ordnung. Bei 1 handelt es sich um eine doppelte Nullstelle des Nenners, aber keine Nullstelle des Zählers, also um einen Pol zweiter Ordnung. Die Residuen bestimmen wir mit der Polformel:

$$\text{res}_{-1}f = \text{res}_1f = \left(\frac{z}{(z^2 + 1)(z + 1)^2} \right)' \Big|_{z=1} = \frac{(z^2 + 1)(z + 1)^2 - 2z^2(z + 1) - 2z(z + 1)(z + 1)}{(z^2 + 1)^2(z + 1)^4} \Big|_{z=1} = -\frac{1}{8}.$$

$$\text{res}_{-i}f = \text{res}_if = \frac{i}{4i(i^2 + 1)(i^2 - 1) + 2i(i^2 - 1)^2} = \frac{1}{8}.$$

- ii) Die Singularitäten sind wieder die Nullstellen des Nenners $(z - i)^2(z + i)^2$, also $\pm i$. Wegen $\frac{\cos(-z)}{((-z)^2 + 1)^2} = \frac{\cos(z)}{(z^2 + 1)^2}$ ist die Funktion gerade und wir können a) benutzen und es genügt wieder das Residuum in i zu bestimmen.

Es handelt sich um eine doppelte Nullstelle des Nenners, aber keine Nullstelle des Zählers, also um einen Pol zweiter Ordnung. Demnach gilt:

$$-\text{res}_{-i}f = \text{res}_if = \left(\frac{\cos(z)}{(z + i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = \frac{-\sin(z)(z + i)^2 - 2\cos(i)(z + i)}{(z + i)^4} \Big|_{z=i} = \frac{\sin(i) - i\cos(i)}{4}.$$

J.F.B.