

**Herbst 25 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto (x_2, -g(x_1)).$$

Betrachtet wird das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$x' = F(x).$$

a) Sei $a \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$x' = F(x), \quad x(0) = a$$

eine eindeutig bestimmte maximale Lösung besitzt.

b) Es gelte jetzt zusätzlich

$$g(0) = 0 \quad \text{und} \quad ug(u) > 0 \text{ für alle } u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass der Ursprung ein stabiler stationärer Punkt ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} g(s) \, ds.$$

Lösungsvorschlag:

- a) F ist stetig differenzierbar mit $JF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(x_1) & 0 \end{pmatrix}$, also lokal Lipschitzstetig und stetig. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf folgt die Aussage, da F auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist.
- b) Wegen $F(0,0) = (0, -g(0)) = (0,0)$ ist der Ursprung eine Ruhelage. Die Funktion V ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stetig differenzierbar mit $\nabla V(x) = (g(x_1), x_2)$, also ist $\nabla V(x) \cdot F(x) \equiv 0$ und bei V handelt es sich um eine Lyapunov-Funktion (und eine Erhaltungsgröße).

Wir zeigen, dass $(0,0)$ ein striktes Maximum von V ist, dann folgt die Stabilität des Ursprungs aus dem Satz von Lyapunov (der Direkten Methode). Es gilt $V(0,0) = 0$. Sei $x_1 > 0$, dann ist g wegen $ug(u) > 0$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ positiv auf $(0, x_1)$. Wegen der Stetigkeit von g ist $\int_0^{x_1} g(s) \, ds > 0$. Analog ist für $x_1 < 0$ die Funktion g negativ auf $(x_1, 0)$ und $\int_0^{x_1} g(s) \, ds = \int_{x_1}^0 -g(s) \, ds > 0$. Ist also $x_1 \neq 0$ so gilt $V(x_1, x_2) \geq \int_0^{x_1} g(s) \, ds > 0$. Ist $x_1 = 0$, so gilt $V(0, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 > 0$ für $x_2 \neq 0$. Damit gilt $V(x_1, x_2) > 0 = V(0,0)$ für $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ und der Ursprung ist ein striktes Minimum von V .

J.F.B.