

**Herbst 25 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben sei die reelle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$x'' + ax' + bx = \alpha(t)$$

mit stetiger rechter Seite $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Es gelte $a^2 = 4b + 4$. Zeigen Sie, dass mindestens eine der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^t + e^{5t} - te^{5t} + \sin(t)$$

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto e^t + 2e^{5t} - 3te^{5t} + \sin(t)$$

keine Lösung der Differentialgleichung ist.

Lösungsvorschlag:

Falls beide Funktionen Lösungen sind, so ist $g - f = e^{5t} - 2te^{5t} =: h(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung $x'' + ax' + bx = 0$. Das charakteristische Polynom $y^2 + ay + b$ besitzt die Nullstellen $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\frac{a}{2} \pm 1$. Demnach ist der Lösungsraum der homogenen Gleichung $\{ce^{(1-\frac{a}{2})t} + de^{(-1-\frac{a}{2})t} : c, d \in \mathbb{R}\}$. Für kein $a \in \mathbb{R}$ ist h in dieser Menge enthalten (die Funktionen $h, e^{(1-\frac{a}{2})t}, e^{(-1-\frac{a}{2})t}$ sind linear unabhängig), also können nicht f und g Lösungen sein.

J.F.B.