

**Herbst 25 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei $\dot{\mathbb{E}} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ die punktierte offene Einheitskreisscheibe.

- a) Zeigen Sie, dass durch

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2} + \sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$$

eine holomorphe Funktion $f : \dot{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert wird.

- b) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung dieser Funktion f in $\dot{\mathbb{E}}$ um 0. Welche Art von Singularität hat f in 0? Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) Geben Sie den Wert des Integrals

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz$$

für alle stetigen und stückweise differenzierbaren geschlossenen Integrationswege γ in $\dot{\mathbb{E}}$ an.

Lösungsvorschlag:

- a) Die Funktion $g(z) := \frac{e^{1/z}}{z^2}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph als Verknüpfung solcher Funktionen. Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$ ist im Inneren ihres Konvergenzbereichs ebenfalls holomorph. Mit der Formel von Cauchy-Hadamard finden wir, dass der Konvergenzradius der Reihe 1 ist. Die Funktion f ist auf $\dot{\mathbb{E}} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cap \mathbb{E}$ holomorph als Summe holomorpher Funktionen.
- b) Mit der Taylorentwicklung der Exponentialfunktion finden wir $f(z) = z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} + \sum_{k=0}^{\infty} z^{k!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(n-2)!} + \sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$ für alle $z \in \dot{\mathbb{E}}$. Da der Hauptteil nicht abbricht ist die Singularität in 0 wesentlich.
- c) Das Residuum von f in 0 ist der Vorfaktor von z^{-1} in der Laurententwicklung um 0, also 0. Aus dem Residuensatz folgt, dass das angegebene Integral immer 0 ist.

J.F.B.