

**Herbst 25 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen  
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine ganze Funktion. Sei  $d \in \{0, 1, 2, \dots\}$ . Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- i)  $f$  ist ein Polynom vom Grad höchstens  $d$ .
- ii) Es gibt ein  $C > 0$  mit  $|f(z)| \leq C(|z|^d + 1)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

**Lösungsvorschlag:**

i)  $\implies$  ii): Wir finden  $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$  mit  $f(z) = \sum_{j=0}^d a_j z^j$  und schätzen mit der Dreiecksun-

gleichung  $|f(z)| \leq \sum_{j=0}^d |a_j| |z|^j \leq C' \sum_{j=0}^d |z|^d$  mit  $C' := \max_{j=0, \dots, d} |a_j|$ . Für  $|z| \leq 1$  gilt

$\sum_{j=0}^d |z|^j \leq \sum_{j=0}^d 1 = (d+1)$  und für  $|z| > 1$  gilt  $\sum_{j=0}^d |z|^j \leq \sum_{j=0}^d |z|^d = (d+1)|z|^d$ . Setzen wir  $C := C'(d+1)$  so gilt ii). Ist nämlich  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \leq 1$ , so  $|f(z)| \leq C'(d+1) = C \leq C(|z|^d + 1)$  und ist  $|z| > 1$ , so ist  $|f(z)| \leq C'(d+1)|z|^d = C|z|^d \leq C(|z|^d + 1)$ .

ii)  $\implies$  i): Wir bestimmen  $f^{(n)}(0)$  für  $n > d$  mit der Taylorformel. Es ist  $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$ , was sich mit der Standardabschätzung abschätzen lässt. Da die Kreislinie mit Radius  $r$  um 0 eine Länge von  $2\pi r$  besitzt und nur komplexe Zahlen mit Betrag  $r$  durchläuft, erhalten wir  $0 \leq |f^{(n)}(0)| \leq rn! \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} \leq n! \frac{C(r^d+1)}{r^n} = \frac{n!C(r^{d-n}+r^{-n})}{1}$ .

Dies gilt für alle  $r > 0$  und im Grenzwert  $r \rightarrow \infty$  konvergiert der letzte Term gegen 0. Also folgt  $|f^{(n)}(0)| = 0$  und somit  $f^{(n)}(0) = 0$  für  $n > d$ . Da  $f$  ganz ist,

gilt  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^d \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , was ein Polynom vom Grad höchstens  $d$  ist.

*J.F.B.*