

**Herbst 25 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben seien die Punkte

$$z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad e_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$. Sei D das offene Dreieck mit den Eckpunkten z_0, z_1, z_2 und sei S das offene Dreieck mit den Eckpunkten e_0, e_1, e_2 .

a) Geben Sie einen Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(S) = D$ an.

b) Bestimmen Sie das Integral

$$\frac{1}{49} \int_D [3(u-1) - (v-1)] \, d(u, v).$$

Lösungsvorschlag:

- a) Wir wählen Φ affin-linear, d. h. wir wählen $\Phi(x) = Ax + z_0$, wobei $Ae_1 = z_1 - z_0$ und $Ae_2 = z_2 - z_0$ sei. D. h. wir wählen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\Phi(x, y) = (2x + y + 1, -x + 3y + 1)$. Wegen $\det(A) = 7 \neq 0$ ist Φ bijektiv mit Umkehrabbildung $\Phi^{-1}x = A^{-1}x - A^{-1}z_0$. Natürlich sind beide Abbildungen stetig differenzierbar mit $J\Phi \equiv A$, $J\Phi^{-1} \equiv A^{-1}$, also handelt es sich bei Φ um einen Diffeomorphismus. Dass $\Phi(S) = D$ ist, folgt aus der linearen Algebra. (Man kann es auch direkt beweisen: Es ist $S = \{ae_0 + be_1 + ce_2 : 0 < a, b, c < 1, a+b+c = 1\}$ und $\Phi(S) = \{\Phi(ae_0 + be_1 + ce_2) \stackrel{*}{=} a\Phi(e_0) + b\Phi(e_1) + c\Phi(e_2) = az_0 + bz_1 + cz_2 : 0 < a, b, c < 1, a+b+c = 1\} = D$, wobei die Affin-Linearität von Φ verwendet wurde, um die Gleichheit $\stackrel{*}{=}$ zu zeigen.)
- b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(u, v) = 3(u-1) - (v-1)$. Nach dem Transformationssatz lässt sich das angegebene Integral als $\frac{1}{7} \int_S f(\Phi(u, v)) \, d(u, v) = \frac{1}{7} \int_S 5u \, d(u, v)$ berechnen. Letzteres können wir nach dem Satz von Fubini berechnen, als $\frac{1}{7} \int_0^1 \int_0^{1-u} 5u \, dv \, du = \frac{1}{7} \int_0^1 5u(1-u) \, du = \frac{1}{7} [\frac{5}{2}u^2 - \frac{5}{3}u^3]_0^1 = \frac{5}{42}$.

J.F.B.