

**Herbst 25 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

- a) Es sei $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $L > 0$ mit $g'(t) \leq -Lg(t)$ für alle $t \in [0, +\infty)$. Zeigen Sie, dass $g(t) \leq g(0)e^{-Lt}$ für alle $t \in [0, \infty)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $t \mapsto e^{Lt}g(t)$.

- b) Im Folgenden bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^n$.

Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $0 \in D$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$. Weiter seien a, b und c positive Konstanten sowie $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion derart, dass

$$a\|x\|^2 \leq V(x) \leq b\|x\|^2 \quad \text{und} \quad \langle \text{grad} V(x), f(x) \rangle \leq -c\|x\|^2$$

für alle $x \in D$. Zeigen Sie, dass es positive Konstanten α, η und K gibt, derart, dass jede maximale Lösung ϕ des Systems $x' = f(x)$ mit $\|\phi(0)\| \leq \eta$ mindestens auf $[0, +\infty)$ existiert und dass

$$\|\phi(t)\| \leq Ke^{-\alpha t} \quad \text{für alle } t \geq 0$$

gilt.

Hinweis: Wenden Sie Teil a) auf die Funktion $V \circ \phi$ an.

Lösungsvorschlag:

- a) Die Funktion aus dem Hinweis ist differenzierbar mit Ableitung $t \mapsto Le^{Lt}g(t) + e^{Lt}g'(t) \leq 0$, also monoton fallend. Damit gilt $g(t)e^{Lt} \leq g(0)e^0 = g(0)$ für $t \geq 0$. Multiplikation mit der positiven Funktion $t \mapsto e^{-Lt}$ liefert die Behauptung.

- b) Da D offen ist und 0 enthält, handelt es sich um einen inneren Punkt und es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $\|x\| < \varepsilon \implies x \in D$. Wir wählen $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$.

Sei ϕ eine Lösung von $x' = f(x)$ mit $\|\phi(0)\| \leq \delta$, wobei ϕ zumindest auf $[0, t_0)$ mit $t_0 > 0$ definiert sei, was nach dem Satz von Picard-Lindelöf möglich ist. Wir können wegen der Stetigkeit der Lösung $t_0 > 0$ so klein wählen, dass $\|\phi(t)\| < \varepsilon$ auf $[0, t_0)$ gilt. Sei $t_0 \in (0, \infty]$ maximal gewählt, sodass ϕ auf $[0, t_0)$ existiert und dort beschränkt gegen ε ist.

Wir betrachten für $t \in [0, t_0)$ die Funktion $g(t) := V(\phi(t))$, dann ist

$$g'(t) = \langle \nabla V(\phi(t)), f(\phi(t)) \rangle \leq -c\|\phi(t)\|^2 \leq -\frac{c}{b}V(\phi(t)) = -\frac{c}{b}g(t).$$

Mit $L = \frac{c}{b} > 0$ folgt aus a) nun $g(t) \leq g(0)e^{-Lt} = V(\phi(0))e^{-Lt}$ auf $[0, t_0)$. Daraus folgt $0 \leq \|\phi(t)\|^2 \leq \frac{1}{a}g(t) \leq \frac{V(\phi(0))}{a}e^{-Lt} \leq \frac{b}{a}\|\phi(0)\|^2 e^{-Lt}$.

Wegen der Nichtnegativität des kleinsten Terms dürfen wir Radizieren und folgern $\|\phi(t)\| \leq \sqrt{\frac{b}{a}}\|\phi(0)\| e^{-\frac{L}{2}t}$ auf $[0, t_0)$. Insbesondere gilt $\|\phi(t)\| \leq \sqrt{\frac{b}{a}}\|\phi(0)\|$ auf $[0, t_0)$.

Wir wählen $\eta := \min\{1, \sqrt{\frac{a}{b}}\}$, $\delta, K := \sqrt{\frac{b}{a}}\eta$, $\alpha := \frac{L}{2} = \frac{c}{2b}$. Aus $\|\phi(0)\| \leq \eta \leq \delta$ folgt die Existenz einer Lösung ϕ von $x' = f(x)$ auf $[0, t_0)$, wobei ϕ auf diesem Intervall gegen ε beschränkt ist und somit in D verläuft und t_0 maximal mit dieser Eigenschaft gewählt sei. (Ist t_0 die endliche Entweichzeit der Lösung, so muss ϕ unbeschränkt sein und wir können $t_0 = \min\{t > 0 : \|\phi(t)\| = \varepsilon\}$ wählen. Genauso können wir vorgehen, wenn ϕ global definiert ist und ein $t > 0$ mit $\|\phi(t)\| \geq \varepsilon$ existiert. Sonst wählen wir $t_0 = \infty$.) Die Abschätzungen zeigen sogar $\|\phi(t)\| \leq \sqrt{\frac{b}{a}} \|\phi(0)\| \leq \delta$ und $\|\phi(t)\| \leq Ke^{-\alpha t}$. Wäre $t_0 < \infty$ so könnten wir die Lösung nach dem Satz von Picard-Lindelöf über t_0 hinaus auf $[0, s_0)$ mit $t_0 < s_0$ fortsetzen können und würden wegen $\|\phi(t)\| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ auf $[0, t_0)$ sogar eine Beschränktheit gegen ε auf $[0, s_0)$ gewährleisten können. Dann wäre t_0 aber nicht maximal gewesen, ein Widerspruch.

J.F.B.