

**Herbst 25 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

- a) i) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = 2y^3$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die eindeutig bestimmte maximale Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$.
 ii) Bestimmen Sie alle $x_1 \in \mathbb{R}$ derart, dass es genau eine differenzierbare Funktion $x : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die den Bedingungen

$$x''(t) = 2x'(t)^3 \quad \text{für alle } t \in [0,1] \text{ und } x(0) = 0 \text{ sowie } x(1) = x_1$$

genügt.

Hinweis: Teil i)

- b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x' = f(t, x)$$

mit einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die bzgl. x Lipschitz-stetig sei. Für je zwei Lösungen $\phi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ von (1) mit $I := I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ sei für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Funktion $c_1\phi_1 + c_2\phi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ebenfalls eine Lösung von (1). Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt derart, dass $f(t, x) = A(t)x$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Lösungsvorschlag:

- a) i) Für $y_0 = 0$ ist $y \equiv 0$ natürlich die global definierte Maximallösung. Mittels Trennung der Variablen finden wir sonst $\frac{1}{4y_0^2} - \frac{1}{4y(t)^2} = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{2s^3} ds = \int_0^t 1 ds = t$, also $y(t)^2 = \frac{1}{\frac{1}{y_0^2} - 4t}$ und durch Radizieren mit Beachtung des Vorzeichens der Anfangsbedingung erhalten wir $y(t) = \operatorname{sgn}(y_0) \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y_0^2} - 4t}}$, was für $t \in (-\infty, \frac{1}{4y_0^2})$ definiert ist. Eine Fortsetzung über den rechten Rand hinaus ist unmöglich, da die Lösungen dort unbeschränkt sind.
- ii) Ist x eine solche Funktion, so erfüllt x' das Problem aus i). Um auf $[0,1]$ definiert zu sein, muss also $x'(0) = 0$ oder $\frac{1}{4x'(0)^2} > 1 \implies |x'(0)| < \frac{1}{2}$ gelten.
- Ist $x'(0) = 0$, so $x' \equiv 0$ und x konstant, also $0 = x(0) = x(1) = x_1$. In diesem Fall, also $x_1 = 0$, ist die einzig mögliche Funktion $x \equiv 0$ und die Bedingung ist erfüllt.
- Ist jetzt $x : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal (stetig) differenzierbar mit $x''(t) = 2x'(t)^3$ und $x'(0) = x_0 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$, so hat x' die in i) bestimmte Form, also folgt aus Integration, dass $x(t) = c - \operatorname{sgn}(x_0) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x_0^2} - 4t}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ gilt. Dann ist $0 = x(0) = c - \operatorname{sgn}(x_0) \frac{1}{2|x_0|} = c - \frac{1}{x_0}$, also muss $c = \frac{1}{x_0}$ sein. Insbesondere ist x also eindeutig bestimmt. Weiter ist $x(1) = \frac{1}{x_0} - \operatorname{sgn}(x_0) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x_0^2} - 4}$. Die zulässigen Werte für x_1 sind also durch 0 und das Bild von $f(x) = \frac{1}{2x} - \operatorname{sgn}(x) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 4}$ unter $M := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}$ gegeben. Wir werden $f(M) = (-1,1) \setminus \{0\}$ zeigen.

Wir betrachten zunächst $f : (0, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist f stetig und differenzierbar und $\operatorname{sgn}(x) = 1$ für alle $x \in (0, \frac{1}{2})$. Es gilt

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3 \sqrt{\frac{1}{x^2} - 4}} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x \sqrt{\frac{1}{x^2} - 4}} - \frac{1}{2} \right).$$

Wir schätzen die Ableitung ab und benutzen, dass $\sqrt{\frac{1}{x^2} - 4}$ wegen $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 4$ positiv und wohldefiniert ist um

$$\frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x \sqrt{\frac{1}{x^2} - 4}} - \frac{1}{2} \right) > \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) > \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2x^2} > 0$$

zu erhalten. Also ist f streng monoton wachsend. Wir bestimmen die Randgrenzwerte.

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{(\frac{1}{2})^2} - 4} = 1,$$

wegen der Stetigkeit der auftretenden Funktionen.

Außerdem gilt

$$f(x) = f(x) \frac{\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 4}}{\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 4}} = \frac{\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4x^2} + 1}{\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 4}} = \frac{1}{\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 4}}$$

nach der dritten binomischen Formel, woraus wir $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ erkennen.

Weil f stetig und monoton wachsend ist, ist das Bild von $(0, \frac{1}{2})$ nach dem Zwischenwertsatz das offene Intervall $(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x)) = (0, 1)$.

Weil f punktsymmetrisch zum Ursprung ist, folgt $f((-\frac{1}{2}, 0)) = (-1, 0)$. Insgesamt folgt $f(M) = (-1, 1) \setminus \{0\}$.

Für jedes $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $|x_1| < 1$ finden wir also genau eine solche Funktion und umgekehrt.

- b) Sei $s \in \mathbb{R}$ fest aber beliebig gewählt. Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existieren offene Intervalle I_1, I_2 mit $s \in I_1, s \in I_2$ und differenzierbare Funktionen $x_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n, x_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $x_1'(t) = f(t, x_1(t)), t \in I_1$ und $x_2'(t) = f(t, x_2(t)), t \in I_2$ sowie $x_1(s) = u, x_2(s) = v$.

Wegen $s \in I_1 \cap I_2$ ist $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ und somit ist die Funktion $x(t) : I_1 \cap I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n, x(t) := \lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = f(t, x(t))$. Außerdem gilt $x(s) = \lambda u + \mu v$.

Es folgt $f(s, \lambda u + \mu v) = x'(s) = \lambda x_1'(s) + \mu x_2'(s) = \lambda f(s, u) + \mu f(s, v)$. Die Abbildung $T_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, Tx = f(s, x)$ ist also $\mathbb{R}$ -linear. Daher gibt es eine Matrix $A(s)$ mit $Tx = A(s)x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $A : s \mapsto A(s)$ stetig ist, wofür nach dem Normäquivalenzsatz beliebige Normen betrachten können. Wir statten $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm und

$\mathbb{R}^{n \times n}$ mit der Operatornorm $\|A\| := \max_{x \in \mathbb{R}^n: \|x\|_2=1} \|Ax\|_2$ aus. Wir wissen bereits, dass f stetig und von der Form $f(t, x) = A(t)x$ ist.

Sei $\varepsilon > 0, s \in \mathbb{R}$. Da f stetig ist, ist f auf dem Kompaktum $\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t| \leq |s| + 1, \|x\|_2 = 1\}$ gleichmäßig stetig und es gibt ein $1 > \delta > 0$ mit $\|(t, x) - (t', x')\|_2 < \delta \implies \|f(t, x) - f(t', x')\|_2 < \varepsilon$ für alle $t, t' \in [0, |s| + 1]$ und $x, x' \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_2 = 1 = \|x'\|_2$. Also folgt für $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - s| < \delta$, dass $\|A(s) - A(t)\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n: \|x\|_2=1} \|A(s)x - A(t)x\|_2 = \max_{x \in \mathbb{R}^n: \|x\|_2=1} \|f(s, x) - f(t, x)\|_2 < \varepsilon$ ist, weil $\|(s, x) - (t, x)\|_2 = |s - t|$ ist, also $\|f(s, x) - f(t, x)\|_2 < \varepsilon$ unabhängig von $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_2 = 1$. Dabei ist zu beachten, dass $\delta < 1$ insbesondere gewährleistet, dass $|t - s| < \delta < 1 \implies |t| \leq s + 1$, also liegt (t, x) im Kompaktum.

J.F.B.