

**Herbst 25 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Im Folgenden sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene.

- a) Es sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorph. Beweisen Sie, dass $|f'(0)| \leq 1$.
- b) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \in G$. Untersuchen Sie die Menge

$$M := \{g'(0) : g : G \rightarrow G \text{ holomorph mit } g(0) = 0\}$$

auf Beschränktheit und auf Offenheit.

Hinweis: Fallunterscheidung $G = \mathbb{C}$ und $G \neq \mathbb{C}$. Für $G \neq \mathbb{C}$ beachte man a).

Lösungsvorschlag:

- a) Sei $0 < r < 1$ und $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto re^{it}$. Nach der Taylorformel gilt $2\pi i f'(0) = \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, was sich mit der Standardabschätzung abschätzen lässt: Wegen $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ ist f beschränkt gegen 1. Längs der Spur von γ_r liegen nur Werte mit Betrag r . Also gilt mit der Kurvenlänge $2\pi r$ von γ_r , dass

$$|f'(0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^2} dz \right| \leq \frac{2\pi r}{2\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r},$$

d. h. $|f'(0)| \leq \frac{1}{r}$. Da $r \in (0, 1)$ beliebig gewählt war, folgt $|f'(0)| \leq \inf_{r \in (0, 1)} \frac{1}{r} = 1$.

- b) Für $G = \mathbb{C}$ gilt $M = \mathbb{C}$, da die Abbildungen $g_w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, g_w(z) = wz$ jeweils holomorph mit $g_w(0) = 0$ und $g'_w(0) = w$ sind. Also ist M offen und unbeschränkt. Für $G \neq \mathbb{C}$ existiert nach dem Riemannschen Abbildungssatz eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} \rightarrow G$ mit $f(0) = 0$. Ist nun $g : G \rightarrow G$ holomorph mit $g(0) = 0$, so ist $h := f^{-1} \circ g \circ f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorph mit $h(0) = 0$, also folgt $|h'(0)| \leq 1$ aus a). Nun ist

$$h'(0) = (f^{-1})'(g(f(0))) \cdot g'(f(0)) \cdot f'(0) = (f^{-1})'(0) \cdot g'(0) \cdot f'(0) = g'(0)$$

unter Verwendung von $f(0) = 0 = g(0)$ und der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion. Also ist $|g'(0)| \leq 1$ für jede holomorphe Funktion $g : G \rightarrow G$ mit $g(0) = 0$.

Für jedes $w \in \overline{\mathbb{D}}$ definiert $g_w : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, g_w(z) = wz$ eine holomorphe Abbildung mit $g'_w(0) = w$. Weiter ist $g = f \circ g_w \circ f^{-1}$ eine holomorphe Abbildung $g : G \rightarrow G$ mit $g(0) = 0$. Unter Verwendung des zuvor Gezeigten ist $g'(0) = g'_w(0) = w$.

Es gilt also $M = \overline{\mathbb{D}}$, was beschränkt aber nicht offen ist.

J.F.B.