

**Herbst 25 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei f eine holomorphe Funktion auf der Kreisscheibe $K_2(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ und f sei reellwertig auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

- a) Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/2\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $z \mapsto \overline{f(1/\bar{z})}$ holomorph auf U ist.
- b) Zeigen Sie mithilfe von a), dass es eine ganze Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, die in $K_2(0)$ mit f übereinstimmt.
- c) Zeigen Sie mithilfe von b), dass f konstant ist.

Lösungsvorschlag:

- a) Wegen $0 \notin U$ ist die Funktion wohldefiniert. Wir können f um 0 in eine Potenzreihe entwickeln, die zumindest einen Konvergenzradius von 2 besitzt. Wir finden also $a_n \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in K_2(0)$. Für $z \in U$ ist $|1/\bar{z}| < 1/(1/2) = 2$ und mit den Eigenschaften der Konjugation daher $\overline{f(1/\bar{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} z^{-n}$ eine konvergente Laurent-Reihe. Diese stellt daher auf dem Konvergenzbereich eine holomorphe Funktion dar. Dieser umfasst zumindest U , womit die Aussage folgt.
- b) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, also $z = \frac{1}{\bar{z}}$ und für $w \in \mathbb{R}$ ist $\bar{w} = w$. Damit folgt $f(z) = \overline{f(z)} = \overline{f(1/\bar{z})}$ für $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$, weil $f(z) \in \mathbb{R}$ und $|z| = 1$ nach Voraussetzung gilt. Diese Menge häuft sich zum Beispiel in i . Damit sind f und die Funktion aus a) holomorphe Funktionen, die auf einer Menge übereinstimmen, die sich in i häuft, worin beide Funktionen holomorph sind. Nach dem Identitätssatz stimmen die beiden Funktionen also sogar auf $U \cap K_2(0) = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}$ überein.
Definieren wir $g = \begin{cases} f(z), & |z| < 2 \\ \overline{f(1/\bar{z})}, & |z| \geq 2 \end{cases}$, so ist g also eine ganze Fortsetzung von f .
- c) f ist holomorph, also stetig auf dem Kompaktum $\overline{K_1(0)}$ und somit beschränkt gegen ein $c > 0$. Die ganze Funktion g aus b) erfüllt für $|z| \geq 2$ nun $|\overline{f(1/\bar{z})}| \leq c$, da $|1/\bar{z}| \leq 1/2 < 1$ ist. Da die Funktion auch stetig auf dem Kompaktum $\overline{K_2(0)}$ und somit beschränkt gegen ein $C > 0$ ist, ist sie global durch $\max\{c, C\}$ beschränkt. Nach dem Satz von Liouville ist g also konstant. Da es sich um eine Fortsetzung von f handelt, ist auch f konstant.

J.F.B.