

**Herbst 25 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

a) Es sei $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$\int_0^1 |f(x)|^n dx \leq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [0,1]$.

Hinweis: Widerspruchsbeweis!

b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- i) Genügen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils einer globalen Lipschitz-Bedingung, so erfüllt auch die Funktion $f \circ g$ eine globale Lipschitz-Bedingung.
- ii) Es seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f \cdot g$ sei Lipschitz-stetig. Dann sind auch f und g Lipschitz-stetig.

Lösungsvorschlag:

a) Angenommen dem wäre nicht so, dann gibt es ein $y \in [0,1]$ mit $|f(y)| > 1$. Wegen der Stetigkeit von f kann sogar $0 < y < 1$ erreicht werden, da aus $|f(0)| > 1$ bzw. $|f(1)| > 1$ auch $|f(y)| > 1$ auf einer Umgebung von 0 bzw. 1 folgt. Sei also $y \in (0,1)$ mit $|f(y)| > 1$, dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|y - z| < \delta \implies z \in (0,1)$ und $|f(z) - f(y)| < \varepsilon \implies |f(z)| > |f(y)| - \varepsilon =: c$. Wählen wir zum Beispiel $\varepsilon = \frac{|f(y)|-1}{2}$, so ist $c > 1$.

Nun folgt $\int_0^1 |f(x)|^n dx \geq \int_{y-\delta}^{y+\delta} c^n = 2\delta c^n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, weshalb $\int_0^1 |f(x)|^n dx$ nicht gegen 1 beschränkt sein kann. Aus Kontraposition folgt das Gewünschte.

b) i) Es gibt $L_f, L_g > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L_f|x - y|$ und $|g(x) - g(y)| \leq L_g|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Also ist

$$|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(y)| = |f(g(x)) - f(g(y))| \leq L_f|g(x) - g(y)| \leq L_f L_g |x - y|,$$

also ist auch $f \circ g$ Lipschitz-stetig.

ii) Diese Aussage ist falsch, die Funktionen $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ liefern ein Gegenbeispiel. Wäre f Lipschitz-stetig, so würde $|f'(x)| = \lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L_f$ folgen, aber $f'(x) = 2x$ ist unbeschränkt. Dagegen ist f stetig und nullstellenfrei, also ist auch g stetig und das Produkt ist konstant, also erst recht Lipschitz-stetig.

Alternativ: $f \equiv 0$ und g stetig aber nicht Lipschitz-stetig, z. B. $g(x) := \sqrt{|x|}$.

J.F.B.