Herbst 24 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei auf dem $\mathbb{R}^2$ das folgende System von autonomen Differentialgleichungen (2):

$$x' = y^3 - x^2 y,$$
$$y' = xy^2 - x^3.$$

a) Bestimmen Sie alle Ruhelagen von (2). Entscheiden Sie begründet, ob (2) eine asymptotisch stabile Ruhelage besitzt, so dass für $t \to \infty$ alle Lösungen gegen diese Ruhelage konvergieren.

b) Zeigen Sie, dass $E(x, y) := y^2 - x^2$ eine Erhaltungsgröße, (d. h. ein Erstes Integral) von (2) ist.

c) Bestimmen Sie für $c > 0$ die eindeutige maximale Lösung von (2) zum Anfangswert $(x(0), y(0)) = (c,0)$ und entscheiden Sie mit Begründung, ob die Ruhelage $(0,0)$ stabil ist.
Hinweis: Man kann mittels Teilaufgabe b) zeigen, dass jede Lösung φ von (2) zum Anfangswert $\varphi(0) = (c,0)$ ein geeignetes lineares Differentialgleichungssystem löst.

Lösungsvorschlag:

a) Wir bestimmen die Nullstellen der Strukturfunktion. Aus $y^3 - x^2y = y(y^2 - x^2) = 0$ folgt $y = 0$ oder $x^2 = y^2 \implies |x| = |y|$. Aus $xy^2 - x^3 = x(y^2 - x^2) = 0$ folgt $x = 0$ oder $x^2 = y^2 \implies |x| = |y|$. Daher sind alle Ruhelagen von der Form (c, c) oder $(c, -c)$ mit $c \in \mathbb{R}$.
Nachdem es verschiedene Ruhelagen gibt und jede konstante Lösung nur gegen diese konvergiert, kann es keine Ruhelage geben gegen die alle Lösungen konvergieren. Wäre (x_0, y_0) eine Ruhelage mit der gesuchten Eigenschaft, so müsste auch die Funktion $(x(t), y(t)) = (|x_0| + 1, |y_0| + 1)$ dagegen konvergieren, was natürlich nicht der Fall ist.

b) Es gilt $\nabla E(x, y)^{\mathrm{T}} f(x, y) = -xy^3 + x^3y + xy^3 - yx^3 = 0$ für alle $(x, y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$.

c) Weil E ein Erstes Integral ist, muss jede Lösung $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ auch $E(\varphi(t)) = E(c,0) = -c^2$ für alle t erfüllen, d. h. es muss $y^2(t) - x^2(t) = -c^2 \implies x^2(t) = y^2(t) + c^2$ gelten. Dies lässt sich zu $x(t) = \sqrt{y^2(t) + c^2}$ umformen, weil die Anfangsbedingung insbesondere $x(0) > 0$ impliziert. Die erste Gleichung $x' = y^3 - x^2y$ wird außerdem zu $x' = -c^2y$. Zusammen folgt also $-c^2y(t) = x'(t) = \frac{y(t)y'(t)}{\sqrt{y^2(t)+c^2}}$, wobei verwendet wurde, dass wegen $c > 0$ der Wurzelausdruck $\sqrt{y^2(t) + c^2}$ stets positiv ist, und die Ableitung daher für jedes t existiert. Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ erhält man durch Trennung der Variablen die Lösung $y(t) = c\sinh(-c^2t)$, woraus man $x(t) = c\cosh(-c^2t)$ erhält. Die Lösung existiert also global und ist durch $\varphi(t) = (x(t), y(t)) = c(\cosh(-c^2t), \sinh(-c^2t))$ gegeben. Für jeden Startwert $c > 0$ gilt $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = (\infty, -\infty)$, weshalb die Ruhelage $(0,0)$ nicht stabil ist. (Auch diese Lösungen divergieren für $t \to \infty$ was das Ergebnis aus a) bestätigt.)

$\mathcal{J.F.B.}$