Herbst 24 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Im Folgenden sei arctan die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Arcustangensfunktion.

a) Zeigen Sie $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ für alle $x > 0$.

b) Zeigen Sie

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = 1$$

und die Divergenz des uneigentlichen Riemann-Integrals

$$\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) \mathrm{d}x.$$

c) Zeigen Sie, dass es keine ganze Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt mit $g(x) = \arctan x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag:

a) Wir betrachten die Funktion $h : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ h(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Es gilt

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

für alle $x > 0$, d. h. die Ableitung ist konstant 0 und daher ist h konstant. Es gilt $h(1) = 2\arctan 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, also ist $h \equiv \frac{\pi}{2}$. Dies beweist die Aussage.

b) Nach Teil a) gilt

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \lim_{x\to\infty} x \arctan \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x},$$

auf den letzten Term wollen wir die Regel von l'Hospital anwenden. Dies ist möglich, weil Zähler und Nenner differenzierbare Funktion sind, die für $x \to 0$ gegen 0 konvergieren und weil die Ableitung des Nenners die konstante Einsfunktion ist, die keine Nullstellen hat. Damit folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1,$$

was zu zeigen war.
Für den zweiten Teil halten wir fest, dass aus der Existenz des obigen Limes die Existenz eines $C > 0$ folgt mit $x > C \implies x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) \geq \frac{1}{2}$, also

$$\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) \mathrm{d}x \geq \int_C^\infty \frac{1}{2x} \mathrm{d}x = \infty,$$

wobei die Nichtnegativität des Integranden und die Divergenz des letzten Integrals benutzt wurde.

c) Angenommen es gäbe eine solche Funktion, dann könnten wir g um 0 in eine Potenzreihe entwickeln, die auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren würde (Maximalität des Konvergenzradius). Das heißt für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen ist und $a_n = g^{(n)}(0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Weil g holomorph ist, aber auf $\mathbb{R}$ mit arctan übereinstimmt, folgt $a_n = \arctan^{(n)}(0)$. Diese Werte lassen sich induktiv oder mithilfe einer geometrischen Reihe bestimmen, es gilt nämlich

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

für alle $x \in (-1{,}1)$. Diese Reihe konvergiert kompakt auf $(-1{,}1)$, wir können also Integral und Reihenbildung vertauschen und erhalten durch gliedweise Integration

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

und daraus $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ divergiert allerdings für $z = i$, denn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} i^{2n+1} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

ist eine harmonische Reihe. Dies widerspricht der Annahme, dass g ganz ist.

Alternativ hätte man auch begründen können, dass eine solche Funktion g eindeutig bestimmt wäre und insbesondere $g(x) = \arctan x$ auf $(-1{,}1)$ erfüllen müsse. Die obige Potenzreihe hätte diese Eigenschaft und besitzt in i eine nicht hebbare Singularität. Damit kann es keine holomorphe Fortsetzung, also auch kein g mit den gesuchten Eigenschaften geben.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$