Herbst 24 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Es sei ferner $f(0) = 0$ ein lokales Minimum von f. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \int_0^1 (1-t)x^2 f''(tx)\mathrm{d}t$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ wird mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet. Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei ferner $F(0) = 0$ ein lokales Minimum von F. Die Hessematrix von F im Punkt $z \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $H_F(z)$. Zeigen Sie, dass

$$F(x) = \int_0^1 (1-t)\langle x, H_F(tx)x\rangle \mathrm{d}t$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Lösungsvorschlag:

a) Der Integrand ist nach den Voraussetzungen stetig, wir können also partiell integrieren. Außerdem gilt $f(0) = 0 = f'(0)$ weswegen wir

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t)x^2 f''(tx)\mathrm{d}t &= (1-t)xf'(tx)\Big|_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 xf'(tx)\mathrm{d}t \\ &= 0 - xf'(0) + f(tx)\Big|_{t=0}^{t=1} = f(x) - f(0) = f(x)\end{aligned}$$

erhalten. Dies war zu zeigen.

b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig aber fest gewählt. Für $x = 0$ ist die Aussage klar, wir betrachten also $x \neq 0$. Wir betrachten die Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, y \mapsto yx$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h = F \circ g$. Als Verkettung zweimal stetig differenzierbare Funktionen ist h ebenfalls zweimal stetig differenzierbar. Es gilt $h(0) = F(0) = 0$ und h hat bei 0 ein lokales Minimum, denn es gibt ein $\delta > 0$ mit $\|y\| < \delta \implies F(y) \geq F(0)$ und für $\varepsilon = \frac{\delta}{\|x\|}$ gilt $|z| < \varepsilon \implies \|zx\| < \delta \implies F(zx) \geq F(0) \implies h(z) \geq h(0)$. Damit können wir Teil a) auf h anwenden. Wir bestimmen h' und h''. Mit der Kettenregel gilt $h'(y) = \langle \nabla F(g(y)), x\rangle$, da $Dg(y) = x$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt. Wir erhalten außerdem

$$h''(y) = \langle \partial_y \nabla F(g(y)), x\rangle = \langle H_F(yx)x, x\rangle = (H_F(yx)x)^{\mathrm{T}}x = x^{\mathrm{T}}H_F(yx)x = \langle x, H_F(yx)x\rangle,$$

weil die Hessematrix einer C^2-Funktion an jeder Stelle symmetrisch ist. Mit a) folgt $F(x) = h(1) = \int_0^1 (1-t)h''(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\langle x, H_F(tx)x\rangle\mathrm{d}t$, wie behauptet.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$