Herbst 24 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } x \in [-1{,}1] \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen der Differentialgleichung $y' = f(y)$.

b) Zeigen Sie, dass jede maximal fortgesetzte Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ monoton wachsend ist und auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

c) Berechnen Sie explizit eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' = f(y), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

d) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(y), \quad y(0) = -1$$

nicht eindeutig lösbar ist.

Lösungsvorschlag:

a) Dies sind genau die Nullstellen von f, also alle c mit $|c| > 1$ oder $\sqrt{1-c^2} = 0 \iff c = \pm 1$. Das heißt die konstanten Lösungen sind genau die Funktionen $y \equiv c$, mit $|c| \geq 1$.

b) Die Monotonie der Lösungen folgt sofort daraus, dass $y' = f(y) \geq 0$ gilt, die Ableitung der Lösung also nicht negativ ist. Sei y_0 eine Lösung auf einem Intervall $[a, b]$ positiver Länge, das x_0 enthält. Die Funktion $g(t, x) = f(x)$ ist auf $[-1{,}1]^2$ stetig und beschränkt durch 1. Nach der quantitativen Version des Satzes von Peano existiert zum Anfangswertproblem $y' = g(t, y), y(b) = y_0(b)$ eine Lösung y_1 mindestens auf $[b-1, b+1]$ und genauso eine Lösung y_2 von $y' = g(t, y), y(a) = y_0(a)$ auf $[a-1, a+1]$. Dann ist

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_2(t) & \text{für } t \in [a-1, a] \\ y_0(t) & \text{für } t \in [a, b] \\ y_1(t) & \text{für } t \in [b, b+1] \end{cases}$$

eine auf $[a-1, b+1]$. definierte differenzierbare Funktion mit $\tilde{y}' = f(\tilde{y})$. Weil die Stetigkeit und Beschränktheit von f global gelten, können wir völlig analog wieder eine Fortsetzung auf $[a-2, b+2]$ finden und die Lösung schließlich global fortsetzen. Etwas genauer: Wir nehmen an das Lösungsintervall der Maximallösung z sei beschränkt, mit (unterer oder oberer) Grenze $z_0 \in \mathbb{R}$, dann gibt es einen Punkt z_1 im Inneren des Intervalls mit $|z_0 - z_1| < \frac{1}{2}$, dann gibt es eine Lösung von $y' = g(t, y), y(z_1) = z(z_1)$, damit kann z weiter fortgesetzt werden mit Grenze $z_0 \pm \frac{1}{2}$, im Widerspruch zur Maximalität.

c) Die Funktion $y(t) = \begin{cases} -1, & t \in (-\infty, 0) \\ -\cos(t), & t \in [0, \pi] \\ 1 & t \in (\pi, \infty) \end{cases}$ erfüllt die Anfangsbedingung und ist stetig differenzierbar, weil $-\cos' = \sin$ gilt und $\sin(0) = 0 = \sin(\pi)$ gilt. Es gilt $|y(t)| \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $y'(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0) \\ \sin(t), & t \in [0, \pi] \\ 0 & t \in (\pi, \infty) \end{cases}$ was wegen $\sqrt{1 - (\pm 1)^2} = 0$ und $\sqrt{1 - (-\cos(t))^2} = \sqrt{(\sin(t))^2} = |\sin(t)| = \sin(t)$ eine Lösung ist, wobei benutzt wurde, dass die Sinusfunktion auf $[0, \pi]$ keine negativen Werte annimmt.

d) Die Funktion $y(t) = \begin{cases} -1, & t \in (-\infty, 0) \\ -\cos(t), & t \in [0, \pi] \\ 1 & t \in (\pi, \infty) \end{cases}$ aus c) erfüllt auch $y(0) = -\cos(0) = -1$ und ist daher eine Lösung des Problems. Die Funktion $z \equiv -1$ ist laut a) ebenso eine Lösung. Weil $y(\frac{\pi}{2}) = 0 \neq -1 = z(\frac{\pi}{2})$ gilt, sind die beiden Lösungen verschieden und das Anfangswertproblem hat keine eindeutige Lösung.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$ und **(JR)**