Herbst 24 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0,1,2\} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \frac{\sin(z)}{z} + \frac{1}{z-2}\left(\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) - 1\right)$$

a) Bestimmen Sie für jede der isolierten Singularitäten von f den Typ und berechnen Sie jeweils das Residuum.

b) Es sei $V := \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |\frac{3}{2} - z| \leq \frac{1}{2}\}$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $f\Big|_{\mathbb{C}\backslash V}$ von f auf $\mathbb{C}\backslash V$ eine Stammfunktion besitzt.

Lösungsvorschlag:

a)

- $z = 0$: Wir verwenden Riemanns Hebbarkeitssatz um zu zeigen, dass $z = 0$ eine hebbare Singularität ist. Das Residuum beträgt dann insbesondere 0. Für $z \neq 0$ gilt wegen der Potenzreihendarstellung der Sinusfunktion
$$\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}.$$
Dies definiert eine auf $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe. Für $0 < |z| < \frac{1}{2}$ ist dies beschränkt und damit ist auch die Funktion f beschränkt, weil $\frac{1}{z-2}\left(\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) - 1\right)$ auf dieser Menge holomorph ist. Nach Riemanns Hebbarkeitssatz ist $z = 0$ eine hebbare Singularität und das Residuum durch 0 gegeben.
- $z = 2$: Dies ist ein Pol erster Ordnung. Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen die gegen 2 konvergiert, so konvergiert $|f(z_n)|$ gegen „$\frac{\sin(2)}{2} + \frac{e^{-1}-1}{0} = \infty$", wobei die uneigentlichen Grenzwertsätze und die Stetigkeit holomorpher Funktionen und des Betrags benutzt wurden. Dagegen konvergiert $f(z_n)(z_n - 2)$ gegen $\frac{\sin(2)}{2} \cdot 0 + e^{-1} - 1 = e^{-1} - 1$. Dies zeigt, dass $z = 2$ ein Pol erster Ordnung ist und das Residuum durch $e^{-1} - 1$ gegeben ist.
- $z = 1$: Diese Singularität ist wesentlich. Die Singularität ist nicht hebbar, weil $f(1-\frac{1}{n})$ gegen ∞ konvergiert, aber auch kein Pol, weil $f(1+\frac{1}{n})$ gegen $\sin(1)-1$ konvergiert. Also ist die Singularität wesentlich. Weil $g(z) := \frac{\sin(z)}{z}$ um $z = 2$ holomorph ist, gilt $\operatorname{Res}_g(2) = 0$. Wir entwickeln den zweiten Summanden in eine Laurentreihe für $|z-1| \leq \frac{1}{2}$. Es gilt
$$\begin{aligned}\frac{1}{z-2}\left(\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) - 1\right) &= -\frac{1}{1-(z-1)}\left(\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) - 1\right) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(z-1)^{-n}.\end{aligned}$$
Mit dem Cauchy-Produkt erhalten wir den Vorfaktor von $(z-1)^{-1}$ durch $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \exp(-1)$. Dies ist das Residuum von $\frac{1}{z-2}\left(\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) - 1\right)$ und von f, weil für $z_0 \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Res}_{h_1+h_2}(z_0) = \operatorname{Res}_{h_1}(z_0) + \operatorname{Res}_{h_2}(z_0)$ gilt.

b) Wir benutzen des Residuensatz. $\mathbb{C}$ ist offen und konvex. f ist holomorph bis auf endlich viele Singularitäten. Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}\backslash V$, dann besitzt 1 die gleiche Windungszahl wie 2, weil die Verbindungsstrecke [1,2] in V liegt. Nach dem Residuensatz gilt für γ nun $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i(0\cdot\mathrm{Ind}_0(\gamma)+\mathrm{Ind}_1(\gamma)(e^{-1}-1+1-e^{-1})) = 0$, also ist das Wegintegral über jeden geschlossenen Weg 0.
Wir finden nun für $z \in \mathbb{C}\backslash V$ einen Weg γ_z, dessen Spur in $\mathbb{C}\backslash V$ liegt und der als Anfangspunkt -1 und als Endpunkt z besitzt. Wir definieren $F(z) = \int_{\gamma_z} f(z)\mathrm{d}z$, dies ist wohldefiniert, da für zwei verschiedene Wege γ und Γ, mit Spur in $\mathbb{C}\backslash V$, Anfangspunkt -1 und Endpunkt z gilt $0 = \int_{\gamma+-\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$, die Wegintegrale haben also denselben Wert. Sei nun $z \in \mathbb{C}\backslash V$ und $\delta > 0$ sodass für $h \in \mathbb{C}$ mit $|h| < \delta$ die Verbindungsstrecke $[z, z+h] \subset \mathbb{C}\backslash V$ erfüllt. Es gilt dann

$$\frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)\ h\ \mathrm{d}z \xrightarrow{h\to 0} f(z),$$

wenn man als Weg von -1 nach $z+h$ den Weg von -1 nach z affin-linear fortsetzt. Hierbei wurde die Stetigkeit von f benutzt, denn für alle $\varepsilon > 0$, gibt ein $\delta > 0$ mit $|z-w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Für $|h| < \delta$ folgt $|z+th-z| < \delta$ für alle $t \in [0,1]$, also auch

$$\left|\int_0^1 f(z+th)\mathrm{d}t - f(z)\right| \leq \int_0^1 |f(z+th) - f(z)|\mathrm{d}z \leq \int_0^1 \varepsilon \mathrm{d}z = \varepsilon,$$

also $\frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)\ h\ \mathrm{d}z = \int_0^1 f(z+th)\ \mathrm{d}z \xrightarrow{h\to 0} f(z)$. Damit ist F Stammfunktion von f auf $\mathbb{C}\backslash V$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$