Herbst 24 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Entscheiden Sie, ob die Funktion $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \cos(z)$ beschränkt auf $\mathbb{C}$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Überprüfen Sie, in welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \overline{z}\mathrm{Im}(z)$ komplex differenzierbar ist.

c) Zeigen Sie, dass es keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, mit

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{1+n^2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lösungsvorschlag:

a) Die Funktion ist nicht beschränkt. cos ist eine ganze Funktion, d. h. holomorph auf $\mathbb{C}$. Wäre sie beschränkt, so wäre sie nach dem Satz von Liouville bereits konstant. Es gilt aber $\cos(0) = 1 \neq 0 = \cos(\frac{\pi}{2})$. Damit ist die Funktion nicht konstant, also auch nicht beschränkt.

b) Mit $z = x + iy$ gilt $f(z) = f(x + iy) = (x - iy)y = xy - iy^2$. Wir überprüfen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für $u(x, y) = xy, v(x, y) = -y^2$. Es muss gelten

$$\partial_x u(x, y) = y \stackrel{!}{=} -2y = \partial_y v(x, y),$$

was genau für $y = 0$ erfüllt ist und

$$\partial_y u(x, y) = x \stackrel{!}{=} 0 = -\partial_x v(x, y),$$

was genau für $y = 0$ erfüllt ist. Alle partiellen Ableitungen sind stetig und das einzige $z \in \mathbb{C}$ für das die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten, ist $z = 0 + i \cdot 0 = 0$. Damit ist f genau in 0 komplex differenzierbar.

c) Angenommen es würde eine solche Funktion f existieren, dann wäre sie bereits eindeutig bestimmt, weil $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist und die Menge $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ den Häufungspunkt $0 \in \mathbb{C}$ besitzt.
Wir kürzen den Bruch mit n^2 um die Gleichung $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1+(\frac{1}{n})^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu erhalten. Wir sehen, dass die Funktion $g : \mathbb{C}\backslash\{-i, i\} \to \mathbb{C}, g(z) = \frac{z}{1+z^2}$ eine holomorphe Funktion ist, die obige Eigenschaft hat. f wäre jetzt eine holomorphe Fortsetzung von g auf $\mathbb{C}$ (eindeutig bestimmt !) also wären beide Singularitäten von g hebbar. Dies ist aber nicht der Fall, weil die Folge $z_n := i + \frac{1}{n}$ gegen i konvergiert und $|g(z_n)|$ gegen ∞ konvergiert, d. h. g ist um i unbeschränkt und i ist keine hebbare Singularität. Also kann es so ein f nicht geben.

J.F.B.