Herbst 24 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Sei
$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{1}{3}y^3 + x^2y - xy.$$
Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von F und entscheiden Sie begründet, welche lokale Maxima bzw. lokale Minima sind.

b) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems
$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - x + y^2,\\ \dot{y} &= y - 2xy.\end{aligned}$$
Entscheiden Sie begründet , welche stationären Lösungen stabil bzw. instabil sind.

Lösungsvorschlag:

a) Für den Gradienten erhält man $\nabla F(x,y) = (2xy - y, y^2 + x^2 - x)^{\mathrm{T}}$, wir bestimmen die Nullstellen: $2xy - y = (2x-1)y$ wird genau dann 0, wenn $x = \frac{1}{2}$ oder $y = 0$ gilt. Im ersten Fall wird aus der zweiten Gleichung $y^2 - \frac{1}{4} = 0$; diese besitzt genau die Lösungen $y = \pm\frac{1}{2}$. Wir erhalten die kritischen Punkte $z_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $z_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Im zweiten Fall wird aus der zweiten Gleichung $x^2 - x = x(x-1) = 0$, was genau die Lösungen $x = 0$ und $x = 1$ besitzt. Wir erhalten $z_3 = (0{,}0)$ und $z_4 = (1{,}0)$.
Um zu entscheiden, welche lokale Extrema sind, untersuchen wir die Definitheit der Hessematrizen. Es gilt $H_F(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 2y \end{pmatrix}$, also $H_F(z_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H_F(z_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $H_F(z_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $H_F(z_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Die ersten beiden Matrizen sind in Diagonalform, ihre Eigenwerte stehen also auf der Hauptdiagonalen. Damit ist die erste Matrix positiv definit und z_1 ein lokales Minimum und die zweite Matrix ist negativ definit und z_2 ein lokales Maximum. Die anderen beiden Matrizen haben als Determinante -1, d. h. das Produkt ihrer Eigenwerte ist negativ und es muss einen positiven und einen negativen Eigenwert geben. Damit sind beide indefinit und z_3, z_4 sind Sattelpunkte.

b) Wir bestimmen die Nullstellen von $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - x + y^2 \\ y - 2xy \end{pmatrix}$, da wir den Gradienten von F erhalten, sind die Ruhelagen genau die kritischen Punkte von F, d. h. $z_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), z_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), z_3 = (0{,}0)$ und $z_4 = (1{,}0)$. Damit ist F Stammfunktion von f und $-F$ eine Lyapunovfunktion für das obige Differentialgleichungssystem. Für $i \in \{1,2,3,4\}$ gibt es jeweils offene Umgebungen um z_i, sodass auf diesen $\nabla(-F) \cdot f(x,y) = -\|f(x,y)\|_2^2 < 0$ für alle $(x,y) \neq z_i$ gilt, weil f nur endlich viele und damit isolierte Nullstellen besitzt. Daher gilt nach der Direkten Methode von Lyapunov, dass z_2 (asymptotisch) stabil ist, weil z_2 ein striktes, lokales Minimum von $-F$ ist. Alle anderen Ruhelagen sind instabil, weil diese keine Minima sind.
Beachte: z minimal für $-F \iff z$ maximal für F.

$\mathcal{J.F.B.}$