**Herbst 24 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)**

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(u)u > 0$ für alle $u \neq 0$. Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$x''(t) + f(x'(t)) + x(t) = 0.$$

Zeigen Sie, dass die einzige periodische Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dieser Differentialgleichung die Funktion mit $x(t) = 0$ ist.
*Hinweis:* Im Fall $f = 0$ ist $E(t) \coloneqq x'(t)^2 + x(t)^2$ eine Erhaltungsgröße. Auch für die hier gestellte Aufgabe ist die Betrachtung von $E$ hilfreich.

**Lösungsvorschlag:**
Offensichtlich ist $x \equiv 0$ eine periodische Lösung dieser Differentialgleichung.

Sei $x(t)$ eine periodische Lösung mit Periode $T > 0$, dann ist auch die Ableitung periodisch mit gleicher Periode. Nun gilt

$$E'(t) = (x(t)^2 + x'(t)^2)' = 2(x(t)x'(t) + x'(t)x''(t)) = -2x'(t)f(x'(t)) \leq 0.$$

Wegen der Periodizität von $x$ und $x'$ gilt

$$0 = E(T) - E(0) = \int_0^T E'(s)\ \mathrm{d}s = \int_0^T -2x'(s)f(x'(s))\ \mathrm{d}s.$$

Der Integrand ist eine stetige, nichtpositive Funktion, also muss der Integrand konstant 0 sein. Wegen der Voraussetzung an $f$ ist also $x'(t)$ konstant 0 auf $[0, T]$ und wegen der Periodizität auch konstant 0 auf $\mathbb{R}$. Damit ist die Ableitung von $x(t)$ konstant 0, also auch die zweite. Außerdem ist $x(t)$ konstant $c \in \mathbb{R}$. Die ursprüngliche Differentialgleichung wird zu $c = x(t) = 0$, also $x \equiv 0$. Dies war zu zeigen.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$ und **(JR)**