Herbst 24 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Die Kurve $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch $\gamma(t) := \frac{1}{2}e^{it}$.

a) Berechnen Sie für jedes $k \in \mathbb{Z}$ das Integral

$$\int_\gamma z^{2k-1} e^{1/z^2} \mathrm{d}z.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{e^{1/z^2}}{z(1-z^2)} \mathrm{d}z.$$

Lösungsvorschlag:

a) Wir verwenden den Residuensatz und überprüfen die Voraussetzungen:
$D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{3}{4}\}$ ist ein konvexes Gebiet, das die Spur der geschlossenen Kurve γ vollständig enthält ($\gamma(0) = \frac{1}{2} = \gamma(2\pi)$). Die Funktion $f(z) = z^{2k-1}e^{1/z^2}$ ist auf $D\backslash\{0\}$ holomorph als Verknüpfung holomorpher Funktionen. Die Kurve verläuft nicht durch den Punkt 0. Damit gilt

$$\int_\gamma z^{2k-1} e^{1/z^2} \mathrm{d}z = 2\pi i \ \mathrm{Ind}_0(\gamma) \ \mathrm{Res}_f(0).$$

Da γ einen Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt 0 parametrisiert, der einmal in positiver Richtung, also gegen den Uhrzeigersinn, durchlaufen wird, beträgt die Windungszahl 1. Wir bestimmen noch das Residuum, indem wir die Laurentreihenentwicklung von f bestimmen. Es gilt

$$f(z) = z^{2k-1}e^{(z^{-2})} = z^{2k-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{-2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2(k-n)-1}}{n!}$$

für alle $z \neq 0$, weil die komlexe Exponentialreihe überall absolut konvergiert. Das Residuum ist nun der Vorfaktor von z^{-1}, also vom k-ten Summanden ($n = k$). Daher ist das Residuum von f bei 0 durch $\frac{1}{k!}$ gegeben. Für das Integral erhalten wir damit $\int_\gamma z^{2k-1}e^{1/z^2}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{k!}$.

b) Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^{2k}$ konvergiert wegen $|z^2| < 1 \iff |z| < 1$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ kompakt gegen $\frac{1}{1-z^2}$, insbesondere also gleichmäßig auf $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{3}{4}\}$. Daher dürfen wir die Potenzreihe gliedweise integrieren. Wir erhalten

$$g(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z(1-z^2)} = \frac{e^{1/z^2}}{z}\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k-1}e^{1/z^2},$$

wobei diese Reihe auf dem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{4} \leq |z| \leq \frac{3}{4}\}$ gleichmäßig konvergiert. Weil die Spur von γ vollständig innerhalb dieses Kreisringes liegt, können wir das

Kurvenintegral folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^{1/z^2}}{z(1-z^2)}\mathrm{d}z &= \int_\gamma \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k-1} e^{1/z^2}\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma z^{2k-1} e^{1/z^2}\mathrm{d}z \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi i}{k!} = 2\pi i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = 2\pi i e^1 = 2\pi i e.\end{aligned}$$

Das Integral hat also den Wert $2\pi i e$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$