Herbst 23 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie die Definition des linksseitigen Grenzwertes $\lim_{x \nearrow c} f(x) = -\infty$ an.

b) Wir betrachten die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int_x^\pi \exp(t^2)\ \mathrm{d}t.$$

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{F(2x)}{\cos(x)}$$

c) Wir betrachten die Exponentialfunktion

$$\exp : U \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(z) \quad \text{auf} \quad U := \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in (0, 2\pi)\}.$$

Diese Funktion ist injektiv und das Bild ist $V := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ (Sie müssen dies nicht beweisen). Es sei $\Theta : V \to U$ die Umkehrfunktion von $\exp : U \to V$. Bestimmen Sie die folgenden beiden Grenzwerte:

$$\lim_{h \searrow 0} \Theta\big(3 \cdot \exp(ih)\big) \quad \text{und} \quad \lim_{h \nearrow 0} \Theta\big(3 \cdot \exp(ih)\big).$$

Lösungsvorschlag:

a) Es gilt $\lim_{x \nearrow c} f(x) = -\infty$ genau dann, wenn zu jedem $M > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$(x < c) \wedge \big(|x - c| < \delta\big) \implies f(x) < -M.$$

b) Hier kommt l'Hôpitals Regel zur Anwendung. Da $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(t^2)$ eine stetige Abbildung ist, ist F nach dem Fundamentalsatz der Analysis stetig differenzierbar (also wieder stetig!) mit $F'(x) = -\exp(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Da $F(\pi) = \int_\pi^\pi \exp(t^2)\ \mathrm{d}t = 0$, muss wegen der Stetigkeit von F auch $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} F(2x) = F\big(2 \cdot \frac{\pi}{2}\big) = F(\pi) = 0$ gelten. Der Grenzwert $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$ ist bekannt. Es kann also l'Hôpitals Regel angewandt werden (es liegt ein "$\frac{0}{0}$"-Fall vor) und es folgt:

$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{F(2x)}{\cos(x)} = \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(2x))}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x)} = \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{2F'(2x)}{-\sin(x)}$$
$$\overset{F',\, -\sin \text{ stetig}}{=} \frac{2F'(\pi)}{-\sin(\pi/2)} = \frac{-2\exp(\pi^2)}{-1} = 2\exp(\pi^2)$$

c) Man kann für $h \in (0, 2\pi)$ umschreiben, indem man ausnutzt, dass Θ die Umkehrfunktion von exp ist:

$$\Theta\big(3 \cdot \exp(ih)\big) = \Theta\big(\exp(\log(3) + ih)\big) = \log(3) + ih \tag{1}$$

Für $h \in (-2\pi, 0)$ hingegen, muss man die Periodizität von exp nutzen, um die Umkehreigenschaft von Θ verwenden zu können (man beachte die Definition von U!):

$$\begin{aligned}\Theta\big(3 \cdot \exp(ih)\big) &= \Theta\big(3 \cdot (\exp(i(h + 2\pi))\big) = \Theta\Big(\exp(\log(3) + i(\underbrace{h + 2\pi}_{\in(0,2\pi)}))\Big)\\ &= \log(3) + i(h + 2\pi)\end{aligned}$$

Um die gesuchten Grenzwerte zu finden, muss jetzt nur noch der entsprechende Grenzübergang bei den beiden obigen Gleichungen gebildet werden. Es folgt:

$$\lim_{h\searrow 0} \Theta\big(3 \cdot \exp(ih)\big) = \log(3), \qquad \lim_{h\nearrow 0} \Theta\big(3 \cdot \exp(ih)\big) = \log(3) + 2\pi i$$

(JR)