Herbst 23 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Es sei
$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(t,x) = t\log(1+x^2) + t^2\cos(x).$$
Zeigen Sie: Jede maximale Lösung von $x' = f(t,x)$ hat $\mathbb{R}$ als Definitionsbereich.

b) Bestimmen Sie alle $r \geq -2023$, so dass folgende Aussage gilt: Jede beschränkte holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z-i| > r\} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist konstant. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

a) Wir beobachten zuerst, dass
$$\big(\log(1+x^2)\big)' = \tfrac{2x}{1+x^2}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0$, da der Nennergrad höher als der Zählegrad ist. Damit muss $\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ beschränkt sein, denn man kann wegen der Grenzwerteigenschaften ein $R > 0$ wählen, sodass $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$ für alle $\mathbb{R} \setminus [-R,R]$ gilt. Auf $[-R,R]$ ist die Funktion, da sie stetig ist, aufgrund des Satzes von Weierstraß beschränkt. Es sei L diese obere Schranke von $\mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$. Dann gilt für $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}\left|t\log(1+x^2) + t^2\cos(x)\right| &= \left|t\int_0^x \frac{2s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s + t^2\cos(x)\right| \\ &\leq |t|\left|\int_0^x L\,\mathrm{d}s\right| + t^2\,|\cos(x)| \\ &\leq |t|L|x| + t^2\end{aligned}$$
Die Strukturfunktion ist also linear beschränkt. Sie ist offensichtlich stetig und lokal Lipschitz stetig (, da sie C^1 ist). Aus den bekannten Resultaten der Differentialgleichungstheorie folgt nun das gewünschte Resultat.

b) Für $r \in [-2023, 0)$ ist f auf ganz $\mathbb{C}$ definiert. Dann greift der Satz von Liouville, dass Beschränktheit von f impliziert, dass f konstant ist.

Ist $r = 0$, so wird der Definitionsbereich von f zu $\mathbb{C} \setminus \{i\}$. Wir nehmen weiter an, dass f beschränkt ist. Dann kann man f nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz zu einer ganzen Funktion $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fortsetzen. Diese ist beschränkt, da $\tilde{f}(\mathbb{C}) = f(\mathbb{C}) \cup \{\tilde{f}(i)\}$ und $f(\mathbb{C})$ nach Annahme beschränkt ist. Damit ist $\tilde{f}$ nach dem Satz von Liouville konstant. Damit ist auch f konstant.

Ist $r > 0$, so können wir etwa die holomorphe Funktion $f(z) := \frac{1}{z-i}$ für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z-i| > r\}$ betrachten. Dann ist für solche z:
$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z-i}\right| \leq \frac{1}{r}$$

Damit ist f beschränkt. f ist aber offenbar nicht konstant.

Die gesuchten r sind also alle $r \in [-2023, 0]$.

(JR)