Herbst 23 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei das ebene Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= y(1-x^2), \\ y' &= -x(1-y^2). \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie ein erstes Integral für dieses System, d.h. eine nicht-konstante Funktion $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die entlang jeder Lösungskurve $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ konstant ist

b) Entscheiden Sie, ob die Ruhelage in $(0,0)$ stabil, asymptotisch stabil beziehungsweise instabil ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

c) Neben dem Ursprung besitzt dieses System vier weitere Ruhelagen. Bestimmen Sie eine davon und diskutieren Sie deren Stabilitätseigenschaften.

Lösungsvorschlag:

a) Eine derartige Abbildung H erfüllt

$$\partial_x H(x,y) y(1-x^2) - \partial_y H(x,y) x(1-y^2) = 0$$

für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$, falls sie differenzierbar ist. Etwa kann man $\partial_x H(x,y) = x(1-y^2)$ und $\partial_y H(x,y) = y(1-x^2)$ ansetzen. Integrieren und vergleichen gibt $H(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2-x^2y^2\right)$ für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$ als mögliche Wahl.

b) Es sei H wie in a). Man berechnet

$$\nabla H(x,y) = \begin{pmatrix} x(1-y^2) \\ y(1-x^2) \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Hess}(H)(x,y) = \begin{pmatrix} (1-y^2) & -2xy \\ -2xy & 1-x^2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\nabla H(0,0) = 0$ und $\operatorname{Hess}(H)(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - also positiv definit (das liest man leicht am doppelten Eigenwert 1 ab). Damit ist $(0,0)^\top$ ein striktes lokales Minimum von H. Nach a) ist H entlang von Lösungskurven konstant. Damit ist H eine Lyapunov-Funktion der Ruhelage. Wir folgern Lyapunov-Stabilität von $(0,0)^\top$.

Aber: Die Ruhelage ist nicht asymptotisch stabil! Wäre dem so, dann gäbe es $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sehr nahe an 0 und eine Lösung $(x,y)^\top : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, sodass die folgenden drei Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \big(x(t), y(t)\big)^\top &= 0 \\ H\big(x(t), y(t)\big) &= H(x_0, y_0) \neq 0 \quad \forall t \in [0,\infty) \\ \big(x(0), y(0)\big) &= x_0. \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung folgt aus a). Lässt man jetzt in dieser zweiten Bedingung $t \to \infty$ laufen, dann konvergieren $x(t)$ und $y(t)$ beide gegen 0 (erste Bedingung) und damit mit der Stetigkeit von H auch $\lim_{t\to\infty} H\big(x(t), y(t)\big) = 0$. Das ist ein Widerspruch zur zweiten Bedingung.

c) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y(1-x^2) \\ -x(1-y^2) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$ definiert. Also ist

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -2xy & 1-x^2 \\ y^2-1 & 2xy \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2$.

Eine Ruhelage des Systems ist $(1,1)^\top$. Es ist $Df(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Daraus ergeben sich die Eigenwerte 2 und -2 von $Df(1,1)$. Da $-2 < 0$, ist die Ruhelage $(1,1)^\top$ nach den bekannten Resultaten über die Linearisierung instabil.

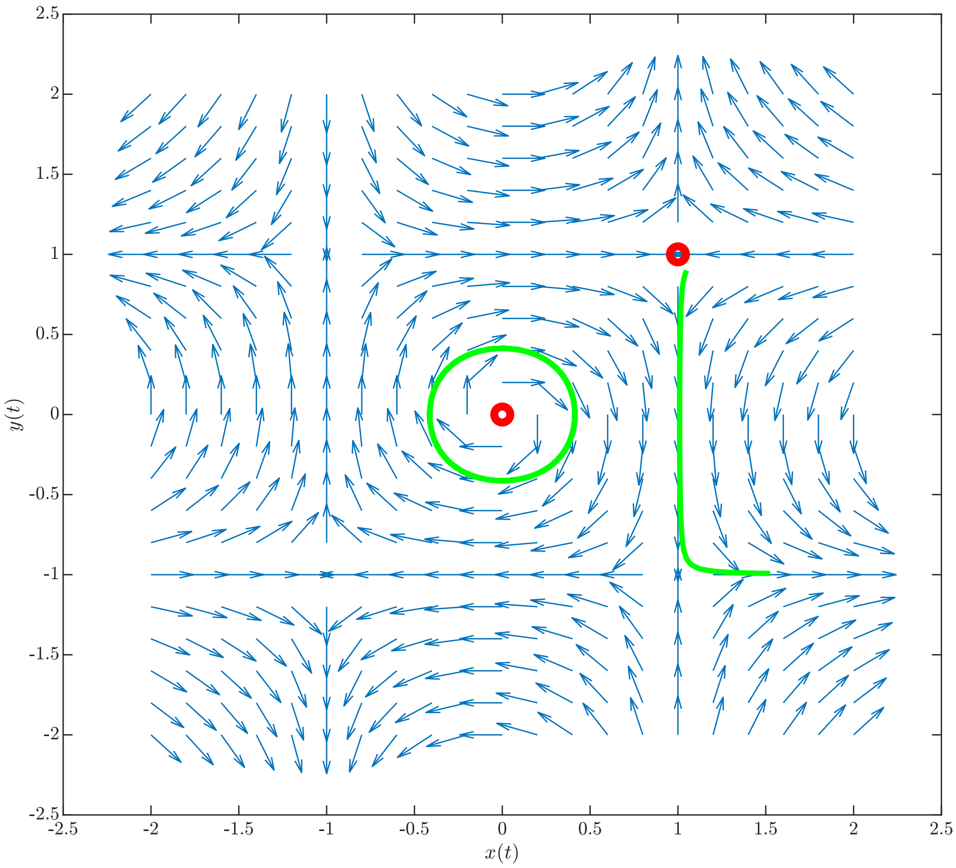

Abbildung 1: Richtungsfeld mit ausgewählten Lösungskurven; Die besprochenen Ruhelagen sind rot eingezeichnet

(JR)