Herbst 23 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

In dieser Aufgabe bezeichne $D(r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ die offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$ und mit Mittelpunkt im Ursprung.

a) Es sei $\varepsilon > 0$, und
$$f : D(1+\varepsilon) \longrightarrow D(1)$$
sei eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie: Es gibt ein eindeutiges $p \in D(1)$, so dass $f(p) = p$.

b) Charakterisieren Sie alle in der offenen Einheitskreisscheibe $D(1)$ holomorphen Funktionen $f : D(1) \longrightarrow \mathbb{C}$, für die es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > N$ gilt:
$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq e^{-n}$$

Lösungsvorschlag:

a) Wir definieren die holomorphen Funktionen $g : D(1+\varepsilon) \to \mathbb{C}$, $h : D(1+\varepsilon) \to \mathbb{C}$ durch $g(z) := -z$ für alle $z \in D(1+\varepsilon)$ und $h := f + g$.
Es gilt für $z \in \partial D(1)$:
$$|\underbrace{f(z)}_{\in D(1)}| < 1 = |g(z)| = |z|$$
g hat genau eine Nullstelle in $D(1)$, nämlich den Nullpunkt. Nach dem Satz von Rouché haben g und h damit beide *genau eine* Nullstelle in $D(1)$. Die Nullstellen von h in $D(1)$ sind aber gerade jede Punkte $p \in D(1)$, die $f(p) = p$ erfüllen. Damit ist die Aussage gezeigt.

b) Da f holomorph ist, gibt es eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 (Potenzreihenentwicklungssatz!) und Koeffizienten $\left(a_k\right)_{k \in \mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$, sodass
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$
für alle $z \in D(1)$.
Es gilt nach Voraussetzung
$$\lim_{n\to\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \right| = a_0.$$
Der letzte Grenzwert gilt, da die Potenzreihe $P_0 : D(1) \ni z \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ nach Voraussetzung Konvergenzradius 1 hat, also eine stetige Funktion ist mit $P_0(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 0^k = 0$. Daher gilt $a_0 = 0$.
Jetzt wandelt man das Argument leicht ab und wiederholt es. Man hat (man beachte $a_0 = 0$):
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} n e^{-n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left| a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \right| = a_1.$$

Hierbei wurde verwendet, dass die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom ($\implies \lim_{n\to\infty} ne^{-n} = 0$; Das könnte man auch durch Anwendung von l'Hôpital auf $\frac{n}{e^n}$ selbst zeigen) und, dass die Potenzreihe $D(1) \ni z \mapsto a_k z^{k-1}$ den gleichen Konvergenzradius wie P_0 hat (das folgt aus $1 = \frac{1}{\limsup k \to \infty |a_k|} = \frac{1}{\limsup k \to \infty |a_{k+1}|}$).
Jetzt setzt man dieses Argument induktiv fort. Allgemein lautet das Argument für $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^m}} \leq \lim_{n\to\infty} n^m e^{-n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^m}} = \lim_{n\to\infty} \left| a_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{n}\right)^{k-m} \right| = a_m.$$

Damit ist $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und nach der Darstellung von f als Potenzreihe kann nur $f = 0$ für eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften infrage kommen.

(JR)