Herbst 23 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die im Ursprung ein striktes Minimum annimmt, d.h. es gilt $F(0) < F(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, und die sonst keine weiteren kritischen Punkte besitzt. Man betrachte das Differentialgleichungssystem

$$x'(t) = f\big(x(t)\big) \quad \text{mit} \quad f(\xi) = -\nabla F(\xi) \text{ für } \xi \in \mathbb{R}^2,$$

wobei ∇F den Gradienten von F bezeichnet.

a) Begründen Sie, warum 0 die einzige Ruhelage des Systems ist.

b) Zeigen Sie mithilfe der direkten Methode von Lyapunov, dass 0 asymptotisch stabil ist.

c) Formulieren Sie ein hinreichendes Kriterium für die asymptotische Stabilität einer Ruhelage eines autonomen Systems gemäß dem Prinzip der linearisierten Stabilität. Geben Sie sodann ein Beispiel einer Funktion F mit den obigen Eigenschaften an, für die das Prinzip der linearisierten Stabilität nicht ausreicht, um die asymptotische Stabilität von 0 zu beweisen.

Lösungsvorschlag:

a) Die Ruhelagen des Systems sind gerade die Nullstellen von ∇F, also gerade die kritischen Punkte von F. Laut Aufgabenstellung gibt es nur einen solchen Punkt, der nach der notwendigen Bedingung erster Ordnung das strikte Minimum 0 sein muss.

b) Es sei $x : I \to \mathbb{R}^2$ eine nichtkonstante Lösung des Systems $x' = f(x)$ mit maximalem Existenzintervall I. Da 0 eine Nullstelle von f ist, ist die konstante Nullfunktion eine Lösung, die nach der Eindeutigkeit der Lösung (F zweimal stetig differenzierbar bedeutet, dass f stetig differenzierbar ist und damit ist der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar) von nichtkonstanten Lösungen nicht geschnitten werden darf. Es folgt also insbesondere $x(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.
Es gilt weiter nach Kettenregel für $t \in I$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(F\big(x(t)\big)\Big) = \nabla F\big(x(t)\big)^\top x'(t) \tag{1}$$

$$= \nabla F\big(x(t)\big)^\top f\big(x(t)\big) = -\nabla F\big(x(t)\big)^\top \nabla F\big(x(t)\big) = -\|\nabla F(x(t))\| < 0 \tag{2}$$

Da $x(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt, ist $\nabla F\big(x(t)\big) \neq 0$ für alle $t \in I$ nach Voraussetzung und daher ist die letzte Ungleichung gerechtfertigt. Wir erinnern uns dabei daran, dass jede Norm in der 0 verschwindet und sonst nirgends.
Damit, da sie genau eine globales Minimum in der Ruhelage hat und (1)-(2) gilt, ist F eine strikte Lyapunov-Funktion des Systems und 0 damit eine asymptotisch stabile Ruhelage.

c) Wir formulieren zunächst das geforderte hinreichende Kriterium: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit

$G(x_0) = 0$. Haben weiterhin alle Eigenwerte von $DG(x_0)$ strikt negativen Realteil, dann ist x_0 eine asymptotisch stabile Ruhelage des Systems $x' = G(x)$.

Nun sei etwa $H(x) := \frac{1}{4}x^4$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $G := -H'$. Nach b) ist die Ruhelage 0 der Differentialgleichung $x' = G(x)$ asymptotisch stabil. Es gilt aber $G'(0) = -H''(0) = -3x^2|_{x=0} = 0$. In diesem Fall lässt Linearisierung keinen Schluss auf Stabilität der Ruhelage 0 zu, da der Realteil von 0 nicht strikt negativ ist.

(JR)