Aufgabenstellung und Lösung

Es ist die folgende Aufgabe zu lösen:Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie jeweils ihre Antwort durch ein Gegenbeispiel oder einen Beweis.

(a) Ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = 0,$$

dann gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^t (x(t))^2 = 0.$

(b) Es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derart, dass die beiden Funktionen $x_1(t) = \mathrm{e}^t$ und $x_2(t) = 1 + t$ für $t \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x'' = f(x', x) \quad \text{lösen.}$$

Lösungsvorschlag: Teilaufgabe (a): Das charakteristische Polynom der gegebenen linearen, homogenen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$p(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 1 \overset{\text{Polynomdivision}}{=} (z+1)^3,$$

wobei wir $z = 1$ als einzige Nullstelle sofort ablesen können. Sie hat Vielfachheit 3, daher sind alle Lösungen der gegebenen Differentialgleichung von der Form $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x(t) = \alpha \cdot \mathrm{e}^{-t} + \beta \cdot t\mathrm{e}^{-t} + \gamma \cdot t^2\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t} \cdot \left(\alpha + \beta t + \gamma t^2\right),$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ gilt. Wir betrachten nun

$$\mathrm{e}^t \cdot (x(t))^2 = \mathrm{e}^t \cdot \mathrm{e}^{-2t} \cdot \left(\alpha + \beta t + \gamma t^2\right)^2 = \mathrm{e}^{-t} \cdot \left(\alpha + \beta t + \gamma t^2\right)^2 \xrightarrow{t\to\infty} 0,$$

denn die Exponentialfunktion konvergiert schneller gegen 0 als jedes beliebige Polynom wächst. Wem diese Begründung nicht genügt, der kann den Wert des Grenzwertes auch mit der Regel von L'Hospital verifizieren. Auch für die Nullfunktion, die ebenso Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist, gilt die Aussage. Also ist sie wahr.

Teilaufgabe (b): Nehmen wir an es gibt so ein f. Wir untersuchen zunächst die gegebenen Funktionen x_1 und x_2. Es gilt für deren Ableitungsfunktionen

$$x_1(t) = \mathrm{e}^t = x_1'(t) = x_1''(t) \quad \text{und}$$

$$x_2(t) = 1 + x, \quad x_2'(t) = 1 \quad \text{und} \quad x_2''(t) = 0.$$

Setzen wir in die gegebene Differentialgleichung $x'' = f(x', x)$ ein, so erhalten wir

$$x_1''(t) = \mathrm{e}^t = f(\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^t) \quad \text{und}$$

$$x_2''(t) = 0 = f(1, 1 + t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Für $t = 0$ liefert das einerseits $\quad x_1''(0) = \mathrm{e}^0 = 1 = f(1, 1) \quad$ sowie gleichzeitig andererseits $\quad x_2''(0) = 0 = f(1, 1). \quad$ Insgesamt haben wir also

$$0 = f(1, 1) = 1,$$

weshalb f nicht wohldefiniert und keine Funktion ist, denn es werden einem Argument zwei Werte zugeordnet. Insbesondere ist f damit nicht stetig, was ein Widerspruch zur Annahme ist. Also gibts so eine Funktion nicht und die Aussage ist falsch.

Hinweis: Wenn man das Problem in ein System mit zwei Gleichungen umschreibt, sollte man mit dem Satz von Picard-Lindelöf und der Eindeutigkeit der Lösung auch zum Ergebnis kommen, dass es so ein f nicht geben kann.

$\mathcal{J}.\mathcal{S}.$