Herbst 23 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ definiert eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ auf den $\mathbb{R}^2$. Es bezeichne

$$K = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

die Einheitskreislinie in $\mathbb{R}^2$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Menge $A(K)$ eine Ellipse mit Mittelpunkt 0 ist. Weiter sei

$$B = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K : x_1 > \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}.$$

Wir versehen den Raum $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$.

a) Entscheiden Sie für die beiden folgenden Maximierungsprobleme jeweils, ob das Maximum existiert, und bestimmen Sie es gegebenenfalls:

$$(1) \quad \max_{x \in K} \|Ax\|^2 \qquad\qquad (2) \quad \max_{x \in B} \|Ax\|^2$$

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Inneren der Ellipse $A(K)$.

Lösungsvorschlag:

a) (1) K ist beschränkt, da alle Punkte $x \in K$ definitorisch $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1$ erfüllen. K ist auch abgeschlossen: Es sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x) := x_1^2 + x_2^2 - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Es ist h als Polynom stetig und $K = h^{-1}(\{0\})$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion wieder abgeschlossen. Damit ist K kompakt. Weiter kann man schreiben für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|Ax\|^2$ $(x \in \mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned} f(x) = \|Ax\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \big(x_1 + 2x_2\big)^2 + \big(-x_1 + 2x_2\big)^2 \\ &= 2x_1^2 + 8x_2^2 \end{aligned}$$

Als Polynom ist f auch stetig.
Nach dem Satz von Weierstraß ist $\sup_{x \in K} \|Ax\|^2$ dann endlich und wird sogar in einem $\hat{x} \in K$ angenommen.

Um dieses $\hat{x}$ zu berechnen, verwenden wir das Lagrange-Kalkül. Wir suchen $x \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}$, sodass

$$\nabla f(x) + \mu \nabla h(x) = 0 \iff \begin{pmatrix} 4x_1 + 2\mu x_1 \\ 16x_2 + 2\mu x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um das System auf der rechten Seite zu lösen, kann man vereinfachen:

$$\begin{pmatrix} x_1(4 + 2\mu) \\ x_2(16 + 2\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir merken kurz an, dass $\nabla h \neq 0$ auf K gilt, da $0 \notin K$. Damit ist das Lagrange-Kalkül als notwendige Bedingung für Optimalität auch anwendbar. Das ergibt die Lösungsmenge für $(x_1, x_2, \mu)^\top$:

$$\big(\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}\big) \cup \big(\{0\} \times \mathbb{R} \times \{-8\}\big) \cup \big(\mathbb{R} \times \{0\} \times \{-2\}\big)$$

Diese Menge geschnitten mit K ergibt die folgenden Kandidaten für das globale Maximum:

$$(0, 1, -8)^\top,\ (0, -1, -8)^\top,\ (1, 0, -2)^\top,\ (-1, 0, -2)^\top$$

Da der Maximierer unter diesen Punkten sein muss, zeigt Einsetzen in die Zielfunktion, dass die ersten beiden Kandidaten wegen des größeren Zielfunktionswertes (8 statt 2) Maximierer sein müssen. Es ist also

$$\max_{x \in K} \|Ax\|^2 = 8.$$

(2) Hier existiert das Maximum nicht: Wir stellen fest, dass $K = \big(\cos(t), \sin(t)\big)^\top_{t \in [0, 2\pi]}$ und

$$f\big(\cos(t), \sin(t)\big) = 2\cos(t)^2 + 8\sin(t)^2 = 2\big(1 - \sin(t)^2\big) + 8\sin(t)^2 = 2 + 6\sin(t)^2$$

für $t \in [0, 2\pi]$. Man sieht, dann, dass

$$B = \big(\cos(t), \sin(t)\big)_{t \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}$$

und, dass $t \mapsto f\big(\cos(t), \sin(t)\big)$ eine gerade Funktion ist, die auf $\big(0, \frac{\pi}{4}\big)$ monoton steigt. Damit muss sie ihr Supremum bei $t \to \frac{\pi}{4}$ und $t \to -\frac{\pi}{4}$ (und sonst nirgends!) erreicht werden. Das globale Maximum wird also nicht angenommen.

b) Es bezeichne $B_1(0)$ die offene Einheitskugel des $\mathbb{R}^2$ und E die Menge, deren Flächeninhalt (maßtheoretisch ist das das Volumen im $\mathbb{R}^2$) gesucht wird. Dann kann man ausrechnen (hier steht *TF* für Transformationsformel):

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_E \,\mathrm{d}x = \int_{A(B_1(0))} \,\mathrm{d}x \overset{\text{TF}}{=} \int_{B_1(0)} |\det A| \,\mathrm{d}x = \det(A)\mathrm{Vol}(B_1(0)) = 4\pi$$

Dabei wurde in der Transformationsformel verwendet, dass die Ableitung der Abbildung $x \mapsto Ax$ die Matrix A ist.

(JR)