Herbst 23 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Für $a \in \setminus\{i, -i\}$ betrachten wir die holomorphe Funktion

$$f_a : \mathbb{C} \setminus \{i, -i, a\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_a(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-a)}.$$

a) Berechnen Sie die Residuen von f_a an den Polstellen i, $-i$ und a und zeigen Sie, dass Ihre Summe den Wert 0 hat.

b) Es sei

$$\Gamma_a = \left\{ \frac{\pi}{i-a} \cdot k + \frac{\pi}{i+a} \cdot \ell : k, \ell \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Zeigen Sie: Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in $\mathbb{C} \setminus \{i, -i, a\}$ gilt $\int_\gamma f_a(z)\, \mathrm{d}z \in \Gamma_a$.

c) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} f_a(z)\, \mathrm{d}z$ für den Fall $\operatorname{Im}(a) > 0$. (Die Existenz des Integrals brauchen Sie nicht nachzuweisen.)

Lösungsvorschlag:

a) Man berechnet:

$$\lim_{z\to a} f_a(z)(z-a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{a^2+1} = \operatorname{Res}_a(f_a)$$

$$\lim_{z\to i} f_a(z)(z-i) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)}{(z^2+1)(z-a)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(z-a)} = \frac{1}{2i(i-a)} = \operatorname{Res}_i(f_a)$$

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -i} f_a(z)(z+i) &= \lim_{z\to -i} \frac{(z+i)}{(z^2+1)(z-a)} \\ &= \lim_{z\to -i} \frac{1}{(z-i)(z-a)} = \frac{1}{(-2i)(-i-a)} = \operatorname{Res}_{-i}(f_a)\end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_a(f_a) + \operatorname{Res}_i(f_a) + \operatorname{Res}_{-i}(f_a) &= \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{2i(i-a)} + \frac{1}{(-2i)(-i-a)} \\ &= \frac{1}{(a^2+1)2i(-2i)(i-a)(-i-a)}\big(2i(i-a)(-2i)(-i-a) \\ &\quad + (a^2+1)(-2i)(-i-a) + (a^2+1)2i(i-a)\big) \\ &= \frac{1}{(a^2+1)2i(-2i)(i-a)(-i-a)}\big(4(a^2+1) \\ &\quad (-2i)(-ia^2-i-a^3-a) + (2i)(a^2i-a^3+i-a)\big) \\ &= \frac{1}{(a^2+1)2i(-2i)(i-a)(-i-a)}\big(4a^2+4 \\ &\quad -2a^2-2+2ia^3+2ia-2a^2-2ia^3-2-2ia\big) \\ &= 0\end{aligned}$$

b) Gemäß Residuensatz kann man für γ wie in der Aufgabenstellung berechnen:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f_a(z)\ \mathrm{d}z &= 2\pi i\big(\mathrm{Res}_a(f_a)\mathrm{Ind}_a(\gamma) + \mathrm{Res}_i(f_a)\mathrm{Ind}_i(\gamma) + \mathrm{Res}_{-i}(f_a)\mathrm{Ind}_{-i}(\gamma)\big)\\ &= 2\pi i\left(\frac{1}{a^2+1}\mathrm{Ind}_a(\gamma) + \frac{1}{2i(i-a)}\mathrm{Ind}_i(\gamma) + \frac{1}{(-2i)(-i-a)}\mathrm{Ind}_{-i}(\gamma)\right)\end{aligned} \tag{1}$$

Aus a) folgt:

$$\frac{1}{a^2+1} = -\frac{1}{2i(i-a)} - \frac{1}{(-2i)(-i-a)}$$

Dann schreibt man (1) um:

$$\begin{aligned}(1) = 2\pi i\Bigg(&\left(-\frac{1}{2i(i-a)} - \frac{1}{(-2i)(-i-a)}\right)\mathrm{Ind}_a(\gamma)\\ &+ \frac{1}{(2i)(i-a)}\mathrm{Ind}_i(\gamma) + \frac{1}{(-2i)(-i-a)}\mathrm{Ind}_{-i}(\gamma)\Bigg)\\ = \frac{\pi}{i-a}&\left(-\mathrm{Ind}_a(\gamma) + \mathrm{Ind}_i(\gamma)\right) + \frac{\pi}{-i-a}\left(\mathrm{Ind}_a(\gamma) - \mathrm{Ind}_i(\gamma)\right)\\ = \frac{\pi}{i-a}&\left(-\mathrm{Ind}_a(\gamma) + \mathrm{Ind}_i(\gamma)\right) + \frac{\pi}{i+a}\left(-\mathrm{Ind}_a(\gamma) + \mathrm{Ind}_i(\gamma)\right)\end{aligned}$$

Dadurch, dass die Windungszahlen ganze Zahlen sind, kann man $\int_\gamma f_a(z)\ \mathrm{d}z \in \Gamma_a$ sofort ablesen.

c) Für $r > 0$ betrachten wir die Wege $\gamma_r : [-r, r] \to \mathbb{R}$, $\mu_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, die durch

$$\gamma_r(t) := t, \quad \mu_r(t) := r\exp(it)$$

für $t \in [0, \pi]$ gegeben sind. Weiter sei $\eta_r := \gamma_r \oplus \mu_r$ für $r > 0$ der entsprechend zusammengesetzte Weg. Dann gilt:

$$\int_{\eta_r} f_a(z)\ \mathrm{d}z = \int_{\gamma_r} f_a(z)\ \mathrm{d}z + \int_{\mu_r} f_a(z)\ \mathrm{d}z = \int_{-r}^{r} f_a(z)\ \mathrm{d}z + \int_{\mu_r} f_a(z)\ \mathrm{d}z \tag{2}$$

Wir betrachten zunächst für $r > 0$ sehr groß und wenden die umgekehrte Dreiecksungleichung an:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mu_r} f_a(z)\ \mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^\pi \frac{ir\exp(it)}{(r^2\exp(2it)+1)(r\exp(it)-a)}\ \mathrm{d}t\right|\\ &= \int_0^\pi \frac{r}{|r^2\exp(2it)+1||r\exp(it)-a|}\ \mathrm{d}t\\ &\leq \int_0^\pi \frac{r}{(r^2-1)(r-|a|)}\ \mathrm{d}t\\ &= \pi\frac{r}{(r^2-1)(r-|a|)} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Weiter ist nach Residuensatz (man beachte, dass a wegen $\mathrm{Im}(a)$ und i in dem von η_r eingeschlossenen Bereich liegen):

$$\begin{aligned}\int_{\eta_r} f_a(z)\ \mathrm{d}z &= 2\pi i\big(\mathrm{Res}_a(f_a) + \mathrm{Res}_i(f_a)\big)\\ &= 2\pi i\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{(2i)(i-a)}\right)\end{aligned}$$

Setzt man diese Formeln in (2) ein und betrachtet dann den Grenzübergang $r \to \infty$, dann gilt:

$$2\pi i \left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{(2i)(i-a)} \right) = \int_{\mathbb{R}} f_a(z)\ \mathrm{d}z$$

(JR)