Herbst 23 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = g$ und $g' = f$ sowie $f(0) = 1$ und $g(0) = 0$. Zeigen Sie:

$$\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2 = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{ und } \quad f(x) + g(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

b) (1) Es seien $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ gilt

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x - x_k)^2}.$$

(2) Es sei $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit den n reellen Nullstellen $x_1, x_2, ..., x_n$. Zeigen Sie:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

und

$$(n-1)\big(P'(x)\big)^2 \geq nP(x)P''(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Lösungsvorschlag:

a) Wir differnzieren für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2\right) = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0$$

Damit ist $\mathbb{R} \ni x \mapsto \big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2$ konstant, also für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\big(f(x)\big)^2 - \big(g(x)\big)^2 = \big(f(0)\big)^2 - \big(g(0)\big)^2 = 1$$

Das zeigt die erste Aussage.

Weiter sei $h(x) := f(x) + g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für solche x gilt

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) = g(x) + f(x) = h(x).$$

h löst also das Anfangswertproblem $h' = h$, $h(0) = 1$. Es ist bekannt, dass damit $h(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten muss. Aus der Positivität der Exponentialfunktion folgt $f(x) + g(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) (1) Es sei x wie in der Angabe. Das Resultat ist eine Anwendung der Hölder-

Ungleichung:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} 1\cdot\frac{1}{x-x_k}\right)^2\\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\left(\sum_{k=1}^{n}1^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2}\end{aligned}$$

(2) Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es ein $a \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Faktorisierungsformel

$$P(x) = a(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

gilt. Man kann dann für $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Produktregel ableiten:

$$P'(x) = a\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x-x_j)$$

Es folgt für alle $x \in \mathbb{R}$, sodass der Nenner nicht verschwindet:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{a\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x-x_j)}{a\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}$$

Damit ist

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \tag{1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ gezeigt.

Jetzt sei weiter $x \in \mathbb{R}\setminus\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Die Gleichung (1) kann auf beiden Seiten differenziert werden (Polynome sind unendlich oft differenzierbar!), um zu erhalten:

$$\frac{P(x)P''(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2} \tag{2}$$

Dabei wurde auf der linken Seite von (2) die Quotientenregel angewandt. Nun kann man zunächst die rechte Seite mit b)(1) abschätzen:

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2} \leq -\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}\right)^2$$

Die linke Seite von (2) wird folgendermaßen behandelt:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)P''(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} &= \frac{P(x)P''(x)}{P(x)^2} - \frac{P'(x)^2}{P(x)^2}\\ &\overset{(1)}{=} \frac{P''(x)}{P(x)} - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}\right)^2\end{aligned}$$

Insgesamt also:

$$-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}\right)^2 \geq \frac{P''(x)}{P(x)} - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}\right)^2$$

Umstellen gibt:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}\right)^2 \geq \frac{P''(x)}{P(x)}$$

Also:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{P'(x)^2}{P(x)^2} \geq \frac{P''(x)}{P(x)}$$

Noch einmal umgestellt liefert das:

$$(n-1)P'(x)^2 \geq nP''(x)P(x)$$

Das war zu zeigen.

(JR)