Herbst 23 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Es seien $Q := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathrm{Re}(z) < 1, -1 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f : \mathbb{D} \to Q$ eine biholomorphe Abbildung mit $f(0) = 0$.

(1) Zeigen Sie: Die Abbildung $g : \mathbb{D} \to Q$, $g(z) = if(z)$, ist biholomorph.

(2) Beweisen Sie: $f(iz) = if(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$.
Hinweis: Sie können z.B. $f^{-1} \circ g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ betrachten.

b) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

(1) Beweisen Sie mithilfe der Cauchy'schen Integralformel

$$|a_k| \leq \frac{1}{(2r)^k} \cdot \max_{|z|=2r} |f(z)| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } r > 0.$$

(2) Zeigen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \leq 2 \max_{|z|=2r} |f(z)| \qquad$ für alle $r > 0$.

Lösungsvorschlag:

a) (1) Holomorphie von g ist klar, da g nur eine holomorphe Funktion ist, die mit einem Skalar multipliziert wurde. Weiter sei $h(z) := f^{-1}(-iz)$ für alle $z \in Q$. Dann, für $z \in Q$:

$$g(h(z)) = if\big(f^{-1}(-iz)\big) = i(-iz) = z = h(g(z)) = f^{-1}\big(-i \cdot if(z)\big) = f^{-1}\big(f(z)\big)$$

Also ist h die Inverse von g und g damit bijektiv. Dass h holomorph ist, folgt aus der Differenzierbarkeit von f^{-1} und $\mathbb{C} \ni z \mapsto -iz$.

(ii) Es ist $F := f^{-1} \circ g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ bijektiv und holomorph, da f^{-1} und g bijektiv und holomorph sind. Insbesondere müssen dann $\theta \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{D}$ existieren, sodass

$$F(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - a}{\overline{a}z - 1}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$ gelten. Das ist ein bekanntes Resultat aus der Funktionentheorie. Wegen $f(0) = 0$ gilt $F(0) = f^{-1}(g(0)) = f^{-1}\big(if(0)\big) = f^{-1}(0) = 0$. Die letzte Gleichung folgt aus der Bijektivität von f und $f(0) = 0$. Also

$$0 = F(0) = e^{i\theta} a$$

und daher $a = 0$, da $e^{i\theta} \neq 0$. Wir folgern

$$F(z) = e^{i\theta} z$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

Es bleibt, θ zu identifizieren. Wir wollen zunächst zeigen, dass $f'(0) \neq 0$. Nach dem Satz über die lokale Normalform holomorpher Funktionen gibt es $\varepsilon > 0$ und eine injektive Abbildung $\eta : B_\varepsilon(0) \to \mathbb{D}$, sodass

$$f\big(\eta(z)\big) = z^m$$

für $m := \min\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(0) \neq 0\}$. Damit, da f und η injektiv sind, muss $B_\varepsilon(0) \ni z \mapsto z^m$ injektiv sein. Man rechnet schnell nach, dass die Gleichung $z^m = \frac{\varepsilon}{2}$ genau m paarweise verschiedene Lösungen in $B_\varepsilon(0)$ hat, nämlich gerade die Menge

$$\left\{ \sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{2}} e^{\frac{2\pi k}{m}} : k = 0, ..., m-1 \right\}.$$

Damit kann $f \circ \eta$ nur injektiv sein, wenn $m = 1$. Wir folgern, dass $f'(0) \neq 0$. Weiter folgt aus $F(z) = \big(f^{-1} \circ g\big)(z) = e^{i\theta} z$ für alle $z \in \mathbb{D}$ insbesondere

$$f\big(e^{i\theta} z\big) = i f(z) \tag{1}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Differentiation von (1) liefert $e^{i\theta} f'\big(e^{i\theta} z\big) - i f'(z) = 0$ für $z \in \mathbb{D}$ und für $z = 0$ insbesondere $f'(0)\big(e^{i\theta} - i\big) = 0$. Wegen $f'(0) \neq 0$ muss $e^{i\theta} = i$ gelten und die Aussage ist gezeigt (siehe (1)).

b) (1) Da f holomorph ist, muss nach dem Potenzreihenentwicklungssatz

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gelten und die Potenzreihe auf der rechten Seite muss auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren. Da f als Potenzreihe definiert ist, muss insbesondere $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ gelten. Nach der Integralformel von Cauchy gilt für $r > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
|a_k| &= \frac{1}{k!} \left| f^{(k)}(0) \right| = \frac{1}{k!} \left| \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\partial B_{2r}(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \,\mathrm{d}\zeta \right| \\
&\overset{\Delta\text{-UG}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial B_{2r}(0)} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \right| \,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial B_{2r}(0)} \frac{|f(\zeta)|}{(2r)^{k+1}} \,\mathrm{d}\zeta \\
&\leq \frac{1}{2\pi (2r)^{k+1}} \max_{|z|=2r} |f(\zeta)| \underbrace{\oint_{\partial B_{2r}(0)} \,\mathrm{d}\zeta}_{=4\pi r} = \frac{4\pi r}{2\pi (2r)^{k+1}} \max_{|z|=2r} |f(\zeta)| \\
&= \frac{1}{(2r)^k} \max_{|z|=2r} |f(\zeta)|
\end{aligned}$$

Die Aussage ist damit gezeigt.

(2) Wir folgern mit Hilfe von (b)(1) für alle $r > 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2r)^k} \max_{|z|=2r} |f(\zeta)| r^k \\
&= \max_{|z|=2r} |f(\zeta)| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= 2 \max_{|z|=2r} |f(\zeta)|
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die geometrische Reihenformel angewandt.

(JR)