**Herbst 23 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)**

Es sei $F : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion, die periodisch mit der Periode $\omega > 0$ ist. Zeigen Sie:

a) Die maximalen Lösungen der autonomen Differentialgleichung $x' = F(x)$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

b) Jede maximale Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $x' = F(x)$ ist streng monoton steigend, nach oben und unten unbeschränkt und surjektiv.
*Zum Nachweis der Unbeschränktheit können sie z.B. indirekt argumentieren oder auch das Wachstum von $x$ geeignet abschätzen.*

c) Für jede maximale Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $x' = F(x)$ existiert eine Konstante $b > 0$ mit $x(t + b) - x(t) = \omega$ für alle $t \in \mathbb{R}$

**Lösungsvorschlag:**

a) Wegen der Periodizität ist

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |F(x)| = \max_{x\in[0,\omega]} |F(x)|.$$

$F$ ist stetig und damit muss wegen der Kompaktheit von $[0, \omega]$ der Ausdruck $\max_{x\in[0,\omega]} |F(x)|$ endlich sein. Damit ist $F$ beschränkt und die Existenz der Lösungen auf $\mathbb{R}$ folgt aus der Standard-Theorie.

b) Dass $x$ steigt folgt direkt daraus, dass $F(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und $x' = F(x)$. Wie in a) kann man argumentieren, dass es $x_a, x_b \in [0, \omega]$ gibt, sodass

$$\min_{x\in\mathbb{R}} F(x) = F(x_a) > 0, \quad \max_{x\in\mathbb{R}} F(x) = F(x_b) > 0.$$

Dann kann man abschätzen:

$$x(0) + F(x_a)t \le x(0) + \int_0^t F\big(x(s)\big)\ \mathrm{d}s = x(t) \qquad \forall t > 0$$
$$x(t) = x(0) + \int_0^t F\big(x(s)\big)\ \mathrm{d}s \le x(0) + F(x_a)t \qquad \forall t < 0$$

Bei $t \to \infty$ in der ersten Ungleichung und $t \to -\infty$ in der zweiten Ungleichung sieht man die Unbeschränktheit. Daraus, also aus $\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \pm\infty$, folgt auch sofort Surjektivität, da mit der Grenzwerteigeschaft und dem Zwischenwertsatz ($x$ ist differenzierbar, also stetig!) alle Werte in $\mathbb{R}$ erreicht werden können.

c) Es sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann, da $x$ streng monoton steigt mit $\lim_{s\to\infty} x(s) = \infty$, gibt es ein eindeutiges $b(t) > 0$, sodass $x\big(t + b(t)\big) = x(t) + \omega$.

Wir definieren die Abbildung $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$G(a, r) := x(r + a) - x(r) - \omega$$

für alle $(a,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gegeben. Es ist $G\big(b(t),t\big) = 0$. Weiter ist

$$\partial_1 G(a,r) = x'(r+a) = F\big(x(r+a)\big) > 0$$

für alle $(a,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Damit gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine offene Umgebung $U$ von $t$, sodass $U \ni s \mapsto b(s)$ differenzierbar ist (wenn man $b(s)$ als eindeutige Zahl definiert, sodass $x\big(s + b(s)\big) = x(s)$ für $s \in U$). Insbesondere ist nach dem gleichen Satz

$$\begin{aligned} b'(s) &= \frac{\partial_2 G\left(b(s), s\right)}{\partial_1 G\left(b(s), s\right)} = \frac{x'\left(s + b(s)\right) - x'(s)}{F\left(x(s + b(s))\right)} = \frac{F\left(x\left(s + b(s)\right)\right) - F\left(x(s)\right)}{F\left(x(s + b(s))\right)} \\ &= \frac{F\left(x(s) + \omega\right) - F\left(x(s)\right)}{F\left(x(s + b(s))\right)} = 0 \end{aligned}$$

für alle $s \in U$. Damit, da $t$ beliebig war, hängt $b(t)$ nicht von $t$ ab und die Aussage ist gezeigt.

**(JR)**