Herbst 23 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Die Funktion $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$E(x, y) := (x - y)e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}$$

a) Es bezeichne $|(x, y)| := \sqrt{x^2 + y^2}$ die euklidische Norm von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Begründen Sie, dass

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} E(x, y) = 0$$

gilt. Zeigen Sie dann, dass die Funktion E ein globales Maximum besitzt und dass dieses nur an der Stelle $(1, -1)$ angenommen wird.
Es ist unnötig, die Hesse-Matrix von E zu berechnen.

b) Zeigen Sie, dass E eine Erhaltungsgröße des Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 + xy - y^2 \\ 2 + xy - x^2 \end{pmatrix}$$

ist. Untersuchen Sie die Ruhelage $(1, -1)$ der Differentialgleichung auf Stabilität und asymptotische Stabilität. Erläutern Sie, was sich aus dem Linearisierungssatz schließen lässt und was mit Hilfe der Methode von Lyapunov. Bei der Anwendung der Methode von Lyapunov können die Aussagen der Teilaufgabe a) hilfreich sein.

Lösungsvorschlag:

a) Zunächst stellen wir fest, dass für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \left|(x - y)e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}\right| \leq \big(|x| + |y|\big)e^{-\frac{1}{4}|(x,y)|^2} \\ &= \big(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}\big)e^{-\frac{1}{4}|(x,y)|^2} \leq 2|(x, y)|e^{-\frac{1}{4}|(x,y)|^2} \end{aligned}$$

Aus dem Grenzwert $\lim_{r\to\infty} 2re^{\frac{1}{4}r^2} = 0$ folgt dann unmittelbar:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} |E(x, y)| \leq \lim_{|(x,y)|\to\infty} 2|(x, y)|e^{-\frac{1}{4}|(x,y)|^2} = 0$$

Der Sandwichsatz impliziert:

$$0 = \lim_{(x,y)\to\infty} |E(x, y)| = \lim_{(x,y)\to\infty} E(x, y)$$

Daher kann man ein $R > 10$ finden, sodass

$$|E(x, y)| < e^{-\frac{1}{2}}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R(0)}$ gilt. Insbesondere ist dann $(1, -1) \in B_R(0)$ und $E(1, -1) = 2e^{-\frac{1}{2}}$. Auf der kompakten Menge $\overline{B_R(0)}$ nimmt die stetige Funktion $E|_{\overline{B_R(0)}}$ (Verkettung aus Polynomen und Exponentialfunktion) ein globales Maximum an. Wir berechnen

$$\nabla E(x, y) = e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 1 + (x - y)\left(-\frac{x}{2}\right) \\ -1 + (x - y)\left(-\frac{y}{2}\right) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und betrachten die Gleichung $\nabla E(x,y) = 0$. Da die Gleichung für $x=0$, $y=0$ nicht erfüllt sein kann, kann man äquivalent umformen:

$$\tfrac{2}{x} = -\tfrac{2}{y} = x - y$$

Daher also $x = -y$. Zurückeingesetzt in $\nabla E(x,y) = 0$ ergibt sich

$$0 = \begin{pmatrix} 1 - x^2 \\ -1 + x^2, \end{pmatrix}$$

also $x \in \{-1, 1\}$. Wir erhalten damit die beiden kritischen Punkte $z_1 := (-1,1)$ und $z_2 := (1,-1)$ (Einsetzen in $\nabla E(x,y)$ bestätigt das). Es gilt $E(z_1) = -2e^{-\frac{1}{2}}$ und $E(z_2) = 2e^{-\frac{1}{2}}$. Damit muss z_1 der globale Minimierer von $E|_{\overline{B_R(0)}}$ sein und z_2 der globale Maximierer von $E|_{\overline{B_R(0)}}$ sein. Da E auf $\mathbb{R} \setminus \overline{B_R(0)}$ kleiner als $e^{-\frac{1}{2}}$ ist, uss z_2 sogar der globale Maximierer von E sein. Einen anderen kann es nicht geben, da es keine anderen kritischen Punkte gibt, die dafür infrage kommen.

b) Es sei $(x,y) : I \to \mathbb{R}^2$ irgendeine Lösung des Differentialgleichungssystems mit maximalem Existenzintervall I. Wir berechnen mit Hilfe der Kettenregel für alle $t \in I$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E\big(x(t), y(t)\big) \\
&= \nabla E\big(x(t), y(t)\big)^\top \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' \\
&= e^{-\frac{1}{4}\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)} \begin{pmatrix} 1 + \big(x(t) - y(t)\big)\left(-\frac{x(t)}{2}\right) \\ -1 + \big(x(t) - y(t)\big)\left(-\frac{y(t)}{2}\right) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 2 + x(t)y(t) - y(t)^2 \\ 2 + x(t)y(t) - x(t)^2 \end{pmatrix} \\
&= e^{-\frac{1}{4}\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)} \left(1 + \big(x(t) - y(t)\big)\left(-\frac{x(t)}{2}\right)\right)\left(2 + x(t)y(t) - y(t)^2\right) \\
&\quad + e^{-\frac{1}{4}\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)} \left(-1 + \big(x(t) - y(t)\big)\left(-\frac{y(t)}{2}\right)\right)\left(2 + x(t)y(t) - x(t)^2\right) \\
&= e^{-\frac{1}{4}\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)} \Bigg(2 + x(t)y(t) - y(t)^2 + 2\big(x(t) - y(t)\big)\left(-\frac{x(t)}{2}\right) \\
&\qquad + \big(x(t) - y(t)\big)\left(-\frac{x(t)}{2}\right) x(t)y(t) - \big(x(t) - y(t)\big)\left(-\frac{x(t)}{2}\right) y(t)^2\Bigg) \\
&\quad + e^{-\frac{1}{4}\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)} \Bigg(-2 - x(t)y(t) + x(t)^2 + 2\big(x(t) - y(t)\big)\left(-\frac{y(t)}{2}\right) \\
&\qquad + \big(x(t) - y(t)\big)\left(-\frac{y(t)}{2}\right) x(t)y(t) - \big(x(t) - y(t)\big)\left(-\frac{y(t)}{2}\right) x(t)^2\Bigg) \\
&= e^{-\frac{1}{4}\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)} \Bigg(2 + x(t)y(t) - y(t)^2 - x(t)^2 + x(t)y(t) \\
&\quad - \frac{x(t)^3 y(t)}{2} + \frac{x(t)^2 y(t)^2}{2} + \frac{x(t)^2 y(t)^2}{2} - \frac{x(t) y(t)^3}{2} \\
&\quad - 2 - x(t)y(t) + x(t)^2 - x(t)y(t) + y(t)^2 \\
&\quad - \frac{x(t)^2 y(t)^2}{2} + \frac{x(t) y(t)^3}{2} + \frac{x(t)^3 y(t)}{2} - \frac{x(t)^2 y(t)^2}{2}\Bigg) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit ist E eine Erhaltungsgröße. $-E$ ist eine Lyapunov-Funktion für das System zur Ruhelage $(1,-1)$, da $(1,-1)$ nach a) ein strikter globaler Minimierer von E ist. Nach einschlägigen Resultaten aus der DGL-Theorie, ist die Ruhelage $(1,-1)$ stabil. Weiter sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} 2 + xy - y^2 \\ 2 + xy - x^2 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} y & x - 2y \\ y - 2x & x \end{pmatrix} \implies DF(1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Man kann $\chi_{DF(1,-1)}(x) = (-1-x)(1-x) + 9 = -1 + x^2 - x + x + 9 = x^2 + 8$ für $x \in \mathbb{R}$ berechnen, d.h. die Eigenwerte von $DF(1,-1)$ sind $\pm 2i\sqrt{2}$. Diese haben Realteil 0, d.h. Linearisierung lässt keinen Schluss auf Stabilität zu.

Die Ruhelage ist aber *nicht* asymptotisch stabil: Wäre dem so, dann gäbe es ein $\delta > 0$, sodass für jede Lösung $(\hat{x},\hat{y}) : \hat{I} \to \mathbb{R}^2$ mit $\big(\hat{x}(0),\hat{y}(0)\big) \in B_\delta\big((1,-1)\big) \setminus \{(1,-1)\}$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hierbei ist die Lösung derart, dass das maximale Existenzintervall $\hat{I}$ den Nullpunkt enthält. Dann müsste aus Stetigkeitsgründen

$$\lim_{t\to\infty} E\big(\hat{x}(t),\hat{y}(t)\big) = E(1,-1)$$

gelten. Aber wegen der Erhaltungseigenschaft ist

$$\lim_{t\to\infty} E\big(\hat{x}(t),\hat{y}(t)\big) = E\big(\hat{x}(0),\hat{y}(0)\big).$$

Es kann aber nicht $E(1,-1) = E\big(\hat{x}(0),\hat{y}(0)\big)$ gelten, da $(1,-1)$ der einzige globale Maximierer von E ist.

(JR)