Herbst 23 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Wir betrachten die meromorphe Funktion

$$f(z) := \frac{z}{e^{2\pi i z} - 1} \quad \text{auf} \quad \Omega := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\ z - 1| < 2\}.$$

a) Skizzieren Sie das Gebiet Ω und bestimmen Sie für jede Polstelle von f jeweils die Ordnung und das Residuum.

b) Wir betrachten den geschlossenen Integrationsweg $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega$, $\gamma(t) = \frac{1}{2} + e^{-it}$. Skizzieren Sie den Weg γ und seinen Umlaufsinn und berechnen Sie das Kurvenintegral $\oint_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$.

Lösungsvorschlag:

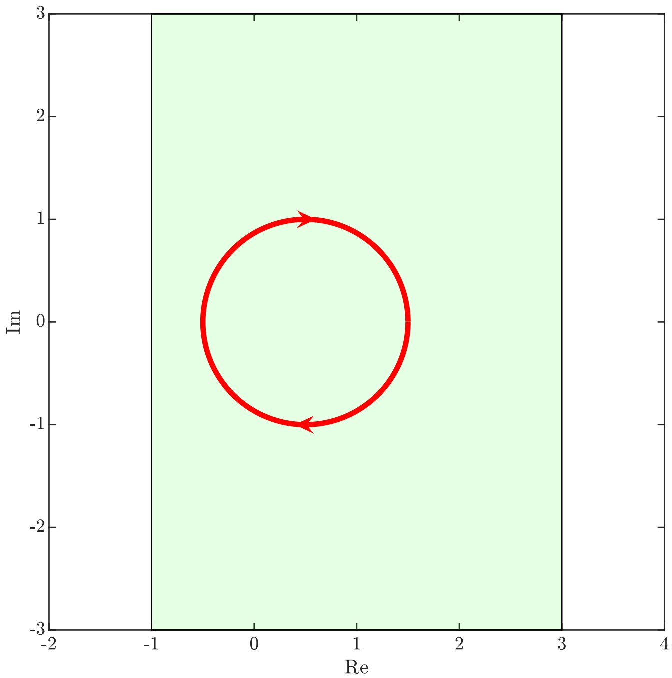

Abbildung 1: Die Kurve γ in rot und das Gebiet Ω in grün

a) Die einzigen ganzen Zahlen in Ω sind 0, 1 und 2. Nur ganze Zahlen lassen den Nenner von f verschwinden. Damit haben wir die Singularitäten als 0, 1 und 2 identifiziert. Jetzt berechnen wir:

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{e^{2\pi i z} - 1} \overset{\text{l'Hop}}{=} \lim_{z \to 0} \frac{1}{2\pi i e^{2\pi i z}} = \frac{1}{2\pi i}$$

Damit ist 0 eine hebbare Singularität und es muss $\mathrm{Res}_0(f) = 0$ gelten.
Weiter ist:

$$\lim_{z \to 1} \frac{z(z-1)}{e^{2\pi i z} - 1} \overset{\text{l'Hop}}{=} \lim_{z \to 1} \frac{2z - 1}{2\pi i e^{2\pi i z}} = \frac{1}{2\pi i}$$

Damit ist $\mathrm{Res}_1(f) = \frac{1}{2\pi i}$ und 1 ist ein Pol der Ordnung 1.
Darüber hinaus:

$$\lim_{z\to 2} \frac{z(z-2)}{e^{2\pi iz}-1} \overset{\text{l'Hop}}{=} \lim_{z\to 2} \frac{2z-2}{2\pi i e^{2\pi iz}} = \frac{1}{\pi i}$$

Es handelt sich bei 2 also um einen Pol erster Ordnung mit $\mathrm{Res}_2(f) = \frac{1}{\pi i}$.

b) Die Kurve ist eine Kreislinie. Im Inneren dieser Kreislinie liegen die Singularitäten 0 und 1, die jeweils einmal im mathematisch negativen Sinne umlaufen werden. Es ergibt sich also nach dem Residuensatz:

$$\oint_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi i\,(-\mathrm{Res}_0(f) - \mathrm{Res}_1(f)) = -3$$

(JR)