3.5 Aufgabe 5

Aufgabe 5:

Untersuchen Sie für alle Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ die Ruhelage $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = ax + ax^3 + by + a^2y^2,$$
$$\dot{y} = -bx + ay - a^2y^2$$

auf ihre Stabilitätseigenschaften.

(6 Punkte)

Für beliebige $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ definieren die Funktion

$$f_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ ; \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + ax^3 + by + a^2y^2 \\ -bx + ay - a^2y^2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$f_{(a,b)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$J(f_{(a,b)})(x, y) = \begin{pmatrix} a + 3ax^2 & b + 2a^2y \\ -b & a - 2a^2y \end{pmatrix}$$

Setzt man die Ruhelage $(0, 0)$ in die Jacobimatrix ein, so erhält man

$$J(f_{(a,b)})(0, 0) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat das charakteristische Polynom

$$(a - x)^2 + b^2 = \big(x - (a + ib)\big) \cdot \big(x - (a - ib)\big)$$

und somit die Eigenwerte $a \pm ib$.

- $a < 0$
  Die Realteile der Eigenwerte sind negativ, so dass die Ruhelage asymptotisch stabil ist.

- $a > 0$
  Es gibt einen Eigenwert mit positivem Realteil, so dass die Ruhelage instabil ist.

- $a = 0$
  Wir erhalten durch die Linearisierung keine Aussage. Allerdings hat das System für Differentialgleichungen folgende Form

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} by \\ -bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  Die Systemmatrix hat das charakteristische Polynom

  $$x^2 + b^2 = (x + ib) \cdot (x - ib)$$

  und somit die Eigenwert $\pm ib$. Beide Eigenwerte haben algebraische Vielfachheit 1, weshalb $(0, 0)$ eine stabile Ruhelage ist.