3.3 Aufgabe 3

Aufgabe 3:

Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ und $G := H \backslash \{iy : y \in (0,1]\}$.

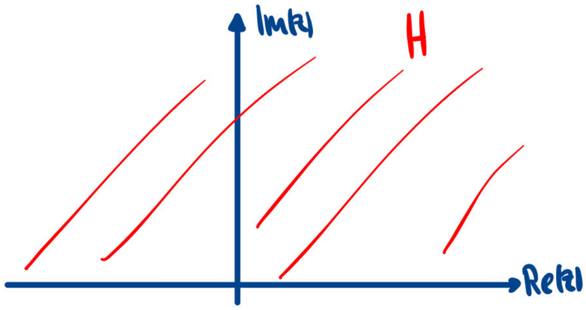
(a) Geben Sie eine biholomorphe Abbildung $f : H \to \mathbb{C} \backslash [0, \infty)$ an.

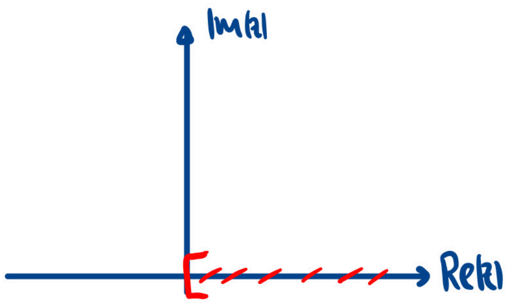
(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $g : H \to \mathbb{E}$, $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ biholomorph ist.

(c) Konstruieren Sie eine biholomorphe Abbildung $h : G \to \mathbb{E}$.

(1+3+2 Punkte)

Zu (a)





Wir behaupten, dass durch

$$f : H \to \mathbb{C} \backslash [0, \infty[\ ;\ z \mapsto z^2$$

eine biholomorphe Abbildung gegeben ist. Sei $x + iy \in H$ beliebig. Dann gilt $y > 0$. Wir nehmen an, es würde

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2ixy \in [0, \infty[$$

gelten. Dann muss $2xy = 0$ gelten. Dies ist nur möglich, wenn x oder y gleich 0 ist. Da $y > 0$ gilt, müsste somit $x = 0$ sein. Dann wäre $-y^2 > 0$, was allerdings unmöglich ist. Somit ist f tatsächlich Eine Abbildung

$$f : H \to \mathbb{C} \backslash [0, \infty[$$

Wir müssen noch zeigen, dass die Abbildung bijektiv ist.

- Injektiv:
  Seien $w, z \in H$ beliebig gegeben mit $f(z) = f(w)$.

  $$f(z) = f(w) \implies z^2 = w^2 \implies 0 = z^2 - w^2 = (z - w)(z + w) \implies z = w \text{ oder } z = -w$$

  Wäre $z = -w$ dann würde gelten

  $$0 < Im(z) = Im(-w) = -Im(w)$$

  Jedoch gilt

  $$Im(w) > 0 \implies -Im(w) < 0$$

  Somit muss $w = z$ gelten und die Injektivität ist gezeigt.

- Surjektiv:
  Jedes $z \in \mathbb{C} \backslash [0, \infty[$ hat eine Darstellung

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} \quad \text{für ein } \varphi \in]0, 2\pi[$$

  Es gilt

$$\sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right) \in H$$

  da $0 < \frac{\varphi}{2} < \pi$ und der Sinus auf $]0, \pi[$ positiv ist. Zudem gilt

$$f\left(\sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}\right) = |z| \cdot e^{i\varphi} = z$$

  Somit ist auch die Surjektivität gezeigt.

Als bijektive, holomorphe Abbildung ist f biholomorph.

Zu (b)

Wir betrachten die Möbiustransformation

$$\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}} \; ; \; z \mapsto \begin{cases} \frac{z-i}{z+i} & \text{für} \quad z \in \mathbb{C} \backslash \{-i\} \\ \infty & \text{für} \quad z = -i \\ 1 & \text{für} \quad z = \infty \end{cases}$$

Diese ist eine biholomorphe Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ und stimmt auf H mit der Funktion g überein. Somit gilt

$$g(H) = \varphi(H)$$

$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist eine verallgemeinerte Kreislinie und teilt $\widehat{\mathbb{C}}$ in die Zusammenhangskomponenten

$$H \quad \text{und} \quad H^- := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) < 0\}$$

Auch $\varphi\big(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\big)$ ist eine verallgemeinerte Kreislinie. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gilt

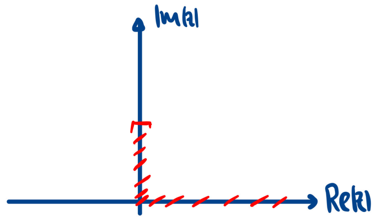
$$|\varphi(x)| = \left| \frac{x - i}{x + i} \right| = 1 \quad \text{und} \quad \varphi(\infty) = 1$$

Somit gilt $\varphi\big(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\big) \subseteq \partial\mathbb{E}$ und da $\varphi\big(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\big)$ eine verallgemeinerte Kreislinie ist, gilt sogar die Gleichheit. Somit besteht $\widehat{\mathbb{C}} \backslash \varphi\big(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\big)$ aus den Zusammenhangskomponenten

$$\mathbb{E} \quad \text{und} \quad \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

Wegen $\varphi(i) = 0 \in \mathbb{E}$ gilt $g(H) = \varphi(H) = \mathbb{E}$. Somit ist g eine biholomorphe Abbildung $H \to \mathbb{E}$.

Zu (c)



$G = H \backslash \{iy : y \in]0, 1]\}$

Wir schränken die Abbildung f auf G ein. Dann gilt

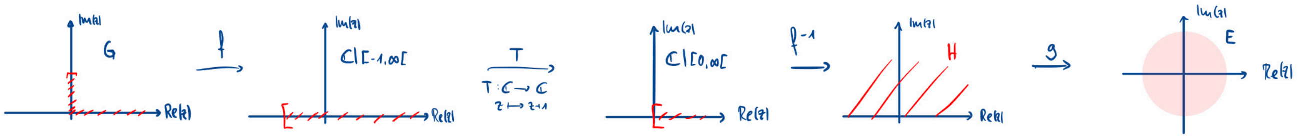
$$f(G) = f\big(H \backslash \{iy : y \in]0,1]\}\big) \overset{(*)}{=} f(H) \backslash f\big(\{iy : y \in]0,1]\}\big)$$

Wobei $(*)$ aufgrund der Bijektivität gilt. Zudem gilt

$$f\big(\{iy : y \in]0,1]\}\big) = \big\{(iy)^2 : y \in]0,1]\big\} = \big\{-y^2 : y \in]0,1]\big\} = [-1,0[$$

Somit erhält man

$$f(G) = \mathbb{C} \backslash [-1, \infty[$$



Als Komposition von biholomorphen Abbildungen ist $h := g \circ f^{-1} \circ T \circ f$ wieder eine biholomorphe Abbildung $h : G \to \mathbb{E}$.