3.2 Aufgabe 2

Aufgabe 2:

Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$.

(a) Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^k}\,dt$$

existiert.

(b) Weisen Sie nach, dass

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^k}\,dt = \frac{\pi}{k\sin\left(\frac{2\pi}{k}\right)}.$$

Hinweis: Ein Kurvenintegral längs einer geschlossenen Kurve, die von 0 zu R und $R \cdot e^{\frac{2\pi i}{k}}$ und dann zurück zu 0 geht, könnte helfen.

(1+5 Punkte)

Zu (a)

Die Funktion

$$f_k: \ [0,\infty[\to \mathbb{R} \ ; \ x \mapsto \frac{x}{1+x^k}$$

ist stetig und somit auf jedem kompakten Intervall integrierbar. Wir definieren

$$F_k: \ [0,\infty[\to \mathbb{R} \ ; \ x \mapsto \int_0^x \frac{t}{1+t^k}dt$$

dann ist F_k monoton steigend, da der Integrand nicht-negativ ist. Sei nun $x \geqslant 1$, dann gilt

$$\int_0^x \frac{t}{1+t^k}dt = \int_0^1 \frac{t}{1+t^k}dt + \int_1^x \frac{t}{1+t^k}dt \leqslant 1 + \int_1^x \frac{t}{t^k}dt \leqslant 1 + \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 2 - \frac{1}{x} < 2$$

Somit ist F_k zudem nach oben schränkt. Daher existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} F_k(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{t}{1+t^k}dt = \int_0^\infty \frac{t}{1+t^k}dt$$

Zu (b)

Wir zeigen, dass die komplexen Nullstellen des Nenners gegeben sind durch

$$N = \left\{ e^{m\frac{2\pi i}{k}} \cdot e^{\frac{\pi i}{k}} : m \in \{0, ..., k-1\} \right\}$$

Da $e^{\frac{2\pi i}{k}}$ eine primitive k-te Einheitswurzel ist, sind alle Elemente aus N paarweise verschieden. Außerdem gilt

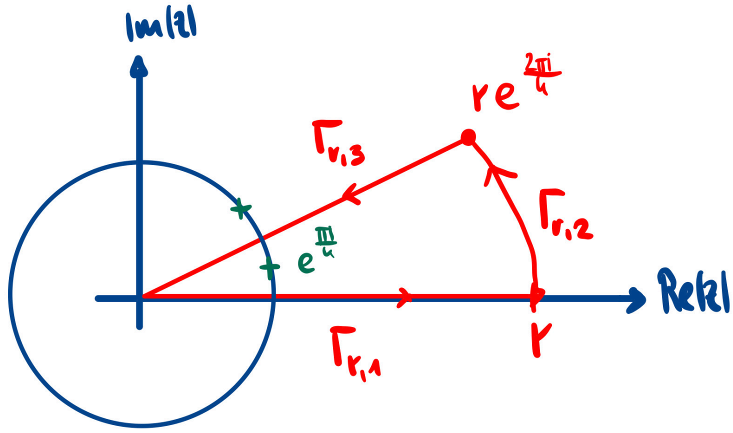
$$\left(e^{m\frac{2\pi i}{k}} \cdot e^{\frac{\pi i}{k}} \right)^k = e^{m2\pi i} \cdot e^{\pi i} = -1$$

so dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ tatsächlich eine Nullstelle des Nenners gegeben ist. Somit enthält N k-verschiedene Nullstellen und da der Nenner ein Polynom von Grad k ist, ist N somit tatsächlich die Nullstellenmenge. Wir definieren

$$f: \mathbb{C}\backslash N \to \mathbb{C} \ ; \ z \mapsto \frac{z}{1+z^k}$$

Diese Funktion ist holomorph und jedes $a \in N$ ist eine isolierte Singularität von f. Sei nun $r > 1$, dann definieren wir den Weg Γ_r durch Hintereinanderausführung von $\Gamma_{r,1}, \Gamma_{r,2}$ und $\Gamma_{r,3}$.

1. $\Gamma_{r,1} : [0, r] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto t$
2. $\Gamma_{r,2} : [0, \frac{2\pi}{k}] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$
3. $-\Gamma_{r,3} : [0, r] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto t \cdot e^{\frac{2\pi i}{k}}$ (Hinweis: Wir definieren die Inversion von $\Gamma_{r,3}$)



Γ_r ist dann in $\mathbb{C}$ geschlossen und nullhomolog.Zudem gilt spur$(\Gamma_r) \cap N = \emptyset$, so dass nach dem Residuensatz folgt

$$\int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in N} res(f, a) \cdot n(\Gamma_r, a)$$

Für $m \in \{1, ..., k-1\}$ liegt $e^{m\frac{2\pi i}{k}} \cdot e^{\frac{\pi i}{k}}$ in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \backslash N$, so dass die Umlaufzahl 0 ist. Außerdem gilt

$$n(\Gamma_r, e^{\frac{pi}{k}}) = 1$$

da es gegen den Uhrzeigersinn umlaufen wird. Somit erhält man

$$\int_{\Gamma_r} f(z)dz = 2\pi i \cdot res(f, e^{\frac{pi}{k}})$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_r} f(z)dz =& \int_{\Gamma_{r,1}} f(z)dz + \int_{\Gamma_{r,2}} f(z)dz - \int_{-\Gamma_{r,3}} f(z)dz \\
=& \int_0^r \frac{t}{1+t^k} dt - \int_0^r \frac{t \cdot e^{\frac{2\pi i}{k}}}{1 + (t \cdot e^{\frac{2\pi i}{k}})^k} \cdot e^{\frac{2\pi i}{k}} dt + \int_{\Gamma_{r,2}} f(z)dz \\
=& \int_0^r \frac{t}{1+t^k} dt - e^{\frac{4\pi i}{k}} \cdot \int_0^r \frac{t}{1+t^k} dt + \int_{\Gamma_{r,2}} f(z)dz \\
=& (1 - e^{\frac{4\pi i}{k}}) \cdot \int_0^r \frac{t}{1+t^k} dt + \int_{\Gamma_{r,2}} f(z)dz
\end{aligned}$$

Wir nun, dass der zweite Summand bei $r \to \infty$ gegen 0 geht.

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_{r,2}} f(z)dz\right| \leqslant L(\Gamma_{r,2}) \cdot \max\left\{|f(z)| : z \in \Gamma_{r,2}\right\} &= \frac{2\pi r}{k} \cdot \max\left\{\left|\frac{re^{it}}{1+r^k e^{kit}}\right| : t \in [0, \frac{2\pi}{k}]\right\} \\ &= \frac{2\pi r}{k} \cdot \max\left\{\frac{r}{|1+r^k e^{kit}|} : t \in [0, \frac{2\pi}{k}]\right\} \\ &\overset{*}{\leqslant} \frac{2\pi r}{k} \cdot \max\left\{\frac{r}{r^k - 1} : t \in [0, \frac{2\pi}{k}]\right\} \\ &= \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{r^2}{r^k - 1} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \text{ da } k > 2\end{aligned}$$

Wobei $(*)$ aufgrund folgender Ungleichung gilt

$$|r^k e^{kit} + 1| = |r^k e^{kit} - (-1)| \geqslant \Big||r^k e^{kit}| - |-1|\Big| = r^k - 1$$

Somit erhält man

$$2\pi i \cdot res(f, e^{\frac{pi}{k}}) = \lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} f(z)dz = \left(1 - e^{\frac{4\pi i}{k}}\right) \cdot \lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{t}{1+t^k} dt$$

Das gesuchte Integral erhält man daher durch

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^k} dt = \frac{2\pi i}{1 - e^{\frac{4\pi i}{k}}} \cdot res(f, e^{\frac{pi}{k}})$$

Da $e^{\frac{pi}{k}}$ eine einfache Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers ist, handelt es sich um einen Pol 1.Ordnung. Folglich erhält man das Residuum durch

$$res(f, e^{\frac{pi}{k}}) = \frac{e^{\frac{pi}{k}}}{k(e^{\frac{pi}{k}})^{k-1}} = \frac{1}{(ke^{\frac{pi}{k}})^{k-2}}$$

Es gilt

$$(e^{\frac{pi}{k}})^{k-2} = e^{\frac{(k-2)pi}{k}} = e^{\frac{kpi}{k}} \cdot e^{\frac{-2pi}{k}} = -e^{\frac{-2pi}{k}}$$

Somit

$$res(f, e^{\frac{pi}{k}}) = -\frac{e^{\frac{2pi}{k}}}{k}$$

Schließlich erhält man

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^k} dt = -\frac{2\pi i}{k} \frac{e^{\frac{2pi}{k}}}{1 - e^{\frac{4pi}{k}}} = -\frac{2\pi i}{k} \frac{1}{e^{\frac{-2pi}{k}} - e^{\frac{2pi}{k}}} = -\frac{2\pi i}{k} \frac{1}{-2i\sin(\frac{2\pi}{k})} = \frac{\pi}{k\sin(\frac{2\pi}{k})}$$