3 Thema 3

3.1 Aufgabe 1

Aufgabe 1:

Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist und begründen Sie Ihre Entscheidung:

(a) Der Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0, i, -i\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{\sin(z)}{z(z^2+1)}$$

um 1 ist 1.

(b) Es gibt eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit einer wesentlichen Singularität bei 0 und Residuum $\operatorname{Res}(g, 0) = 0$.

(c) Die Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $h_n(x) = xe^{-\frac{x^2}{n}}$ für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

(2+2+2 Punkte)

Zu (a)

Wegen

$$\frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$$

hat f bei 0 eine hebbare Singularität. Somit konvergiert die Potenzreihe von f auf

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}\}$$

weshalb der Konvergenzradius $\geqslant \sqrt{2}$ ist. Somit ist die Aussage falsch.

Zu (b)

Die Funktion

$$g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C} \ ; \ z \mapsto \exp\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

hat die Laurentreihe

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^{2k}}$$

Somit hat g bei 0 eine wesentliche Singularität, da die Laurentreihe um 0 unendlich viele, nicht triviale negative Summanden Zusätzlich ist das Residuum 0, da der Koeffizient von $\frac{1}{z}$ 0 ist.

Zu (c)

Die Funktion konvergiert punktweise gegen die Identität da für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$h_n(x) = xe^{-\frac{x^2}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} xe^0 = x$$

Somit kann die Funktion erst recht nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergieren.