2.5 Aufgabe 5

Aufgabe 5:

Konstruieren Sie eine nicht-konstante, stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ derart, dass die Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ jeweils die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) Die Funktion $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $E(x) := x_1^2 + x_2^2$ ist eine Erhaltungsgröße (ein erstes Integral) der Differentialgleichung.

(b) Zusätzlich zu der Eigenschaft in (a) besitzt die Differentialgleichung die stationären Lösungen $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$ und keine weiteren.

(c) Zusätzlich zu den Eigenschaften in (a) und (b) besitzt die Differentialgleichung zwei Lösungen $x_\pm\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\lim_{t\to\infty} x_+(t) = (1,0) = \lim_{t\to-\infty} x_-(t) \quad \text{und}$$
$$\lim_{t\to-\infty} x_+(t) = (-1,0) = \lim_{t\to\infty} x_-(t).$$

Weisen Sie in jedem Aufgabenteil nach, dass die von Ihnen konstruierte Funktion f diese Eigenschaften tatsächlich besitzt.

(1+2+3 Punkte)

Zu (a)

Die Funktion

$$f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; ; \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

erfüllt offensichtlich die gewünschte Eigenschaft, da gilt

$$\nabla E(x,y) \cdot f_a(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = 0$$

Zu (b)

Ist

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion, so ist auch

$$f_b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; ; \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \cdot g(x,y) \\ -x \cdot g(x,y) \end{pmatrix}$$

stetig differenzierbar und es gilt

$$\nabla E(x,y) \cdot f_b(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \cdot g(x,y) \\ -x \cdot g(x,y) \end{pmatrix} = 0$$

so dass E weiterhin eine Erhaltungsgröße ist. Setzt man

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; ; \; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to y^2 + (x^2-1)^2$$

so sind $(-1,0), (0,0), (1,0)$ die einzigen Nullstellen und somit auch stationären Lösungen. Offensichtlich gilt

$$f_b(0,0) = f_b(-1,0) = f_b(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wäre $y \neq 0$, so hat der erste Eintrag keine Nullstelle, da gilt

$$y^2 + (x^2-1)^2 \geqslant y^2 > 0 \implies y^2 + (x^2-1)^2 \neq 0 \implies y \cdot \big(y^2 + (x^2-1)^2\big) \neq 0$$

Somit muss $y = 0$ gelten. Aus der zweiten Zeile erhält man

$$0 = -x \cdot (x^2-1)^2 \implies x = 0 \text{ oder } (x^2-1)^2 = 0 \implies x \in \{0, \pm 1\}$$

Zu (c)

Wir behaupten, dass f_b bereits die gewünschten Eigenschaften erfüllt. Wir müssen zeigen, dass es Lösungen

$$x_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad x_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

gibt mit

$$\lim_{t\to\infty} x_+(t) = (1,0) = \lim_{t\to-\infty} x_-(t) \quad \text{und} \quad \lim_{t\to-\infty} x_+(t) = (-1,0) = \lim_{t\to\infty} x_-(t)$$

Da E eine Erhaltungsgröße ist, hat die Differentialgleichung

$$x' = f_b(x)$$

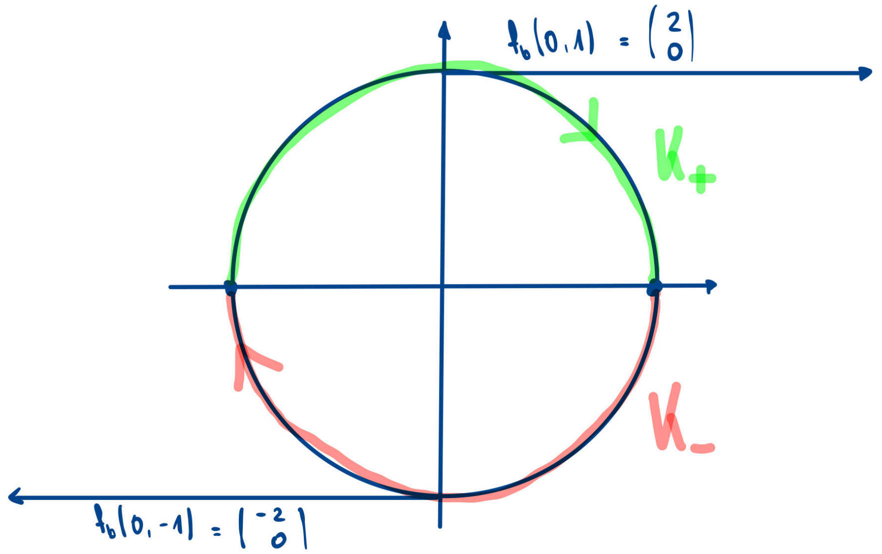
Kreislinien als Niveaumengen

$$K_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\} \text{ für jedes } r \geqslant 0$$

Die Kreislinien bilden für $0 < r < 1$ und $r > 1$ bereits Trajektorien der Differentialgleichung, da durch keine stationären Lösungen zerlegt werden. K_1 enthält die stationären Punkte $(\pm 1, 0)$, weshalb K_1 in vier Trajektorien $\{(1,0)\}$, $\{(-1,0)\}$ und in

$$K_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y > 0\} \text{ und } K_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y < 0\}$$

zerlegt wird.



Diese werden im Uhrzeigersinn durchlaufen. Da K_+ und K_- weder einpunktig noch geschlossene Kurven sind, sind die beide Trajektorien zu injektiven maximalen Lösungen. Diese bezeichnen wir mit

$$\lambda_+ :]a_+, b_+[\to \mathbb{R}^2 \quad \text{bzw.} \quad \lambda_- :]a_-, b_-[\to \mathbb{R}^2$$

Aufgrund der Wahl der Funktionen gilt

$$K_+ = \lambda_+\Big(\,]a_+, b_+[\,\Big) \quad \text{bzw.} \quad K_- = \lambda_-\Big(\,]a_-, b_-[\,\Big)$$

Da K_+ von λ_+ im Uhrzeigersinn durchlaufen wird und die Funktion injektiv ist, muss gelten

$$(1,0) = \lim_{t \to b_+} \lambda_+(t) \quad \text{und} \quad (-1,0) = \lim_{t \to a_+} \lambda_+(t)$$

Wäre $b_+ < \infty$, dann wäre

$$\Gamma_+(\lambda_+) = \Big\{\big(t, \lambda_+(t)\big)_t \in [0, b_+[\Big\} \subseteq [0, b_+[\times K_1$$

relativ kompakt in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, was der Charakterisierung von λ_+ als maximale Lösung widerspricht, weshalb $b_+ = \infty$ gelten muss. Analog zeigt man $a_+ = -\infty$. Insgesamt ist daher

$$\lambda_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

eine maximale Lösung von

$$x' = f_b(x)$$

mit

$$(1,0) = \lim_{t \to \infty} \lambda_+(t) \quad \text{und} \quad (-1,0) = \lim_{t \to -\infty} \lambda_+(t)$$

Analog geht man bei λ_- vor.