2.4 Aufgabe 4

Aufgabe 4:

(a) Bestimmen Sie die Lösung von

$$u''(t) - u(t) = t, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

(b) Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass für alle $y_0 \in (0,1)$ das Anfangswertproblem

$$y' = y(y-1)g(y),$$
$$y(0) = y_0$$

eine Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $y(t) \in (0,1)$ für alle $t \in [0,\infty)$ hat.

(3+3 Punkte)

Zu (a)

Wir lösen zunächst die homogene Differentialgleichung

$$u'' - u = 0$$

Diese hat das charakteristische Polynom

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

und somit die Nullstellen ± 1. Daher bilden

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto e^t \quad \text{und} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto e^{-t}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung. Für die Funktion

$$\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto -t$$

gilt

$$\mu'(t) = -1 \quad \text{und} \quad \mu''(t) = 0$$

weshalb auch gilt

$$\mu''(t) - \mu(t) = t$$

gilt. Somit ist μ eine partikuläre Lösung. Somit hat jede Lösung die Form

$$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto -t + ae^t + be^{-t} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

Man erhält

$$\lambda(t) = -t + ae^t + be^{-t} \implies \lambda(0) = a + b$$
$$\lambda'(t) = -1 + ae^t - be^{-t} \implies \lambda'(0) = -1 + a - b$$

Somit muss gelten

$$0 = a + b$$
$$1 = -1 + a - b$$

Aus der ersten Zeile folgt $a = -b$. Setzt man dies in die zweite Zeile ein, so erhält man

$$2 = 2a \implies a = 1 \implies b = -1$$

Somit ist λ gegeben durch

$$\lambda(t) = -t + e^t - e^{-t}$$

Zu (b)

Als Produkt von stetig differenzierbaren Funktionen ist

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} y \mapsto y(y-1)g(y)$$

stetig differenzierbar. Nach dem Satz von Piccard-Lindelöf hat somit für jedes $\zeta \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$y' = f(y) \quad y(0) = \zeta$$

eine eindeutige maximale Lösung

$$\lambda_\zeta : I_\zeta \mapsto \mathbb{R}$$

auf einem offenem Intervall mit $0 \in I_\zeta$. Offensichtlich sind durch

$$\lambda_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto 0 \quad \text{bzw.} \quad \lambda_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto 1$$

maximale Lösungen von

$$y' = f(y) \quad y(0) = 0 \text{ bzw. } y(0) = 1$$

gegeben. Sei nun $\zeta \in]0,1[$ beliebig und λ_ζ die maximale Lösung von

$$y' = f(y) \quad y(0) = \zeta$$

Wir behaupten, dass für jedes $t \in I_\zeta$ gilt

$$0 < \lambda_\zeta(t) < 1$$

Nehmen wir zunächst an, es gäbe ein $s \in I_\zeta$ mit

$$0 \geqslant \lambda_\zeta(s)$$

dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $tau \in I_\zeta$ mit

$$0 = \lambda_\zeta(\tau)$$

Folglich sind λ_0 und λ_ζ maximale Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = f(y) \quad y(0) = 0$$

weshalb $\lambda_0 \equiv \lambda_\zeta$ folgt. Wir erhalten den Widerspruch

$$0 = \lambda_0(0) = \lambda_\zeta(0) = \zeta$$

weshalb unsere Annahme falsch war und

$$0 < \lambda_\zeta(t) \quad \text{für alle } t \in I_\zeta$$

gelten muss. Nehmen wir nun an, es gäbe ein $s \in I_\zeta$ mit

$$\lambda_\zeta(s) \geqslant 1$$

dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $tau \in I_\zeta$ mit

$$1 = \lambda_\zeta(\tau)$$

Folglich sind λ_1 und λ_ζ maximale Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = f(y) \quad y(0) = 1$$

weshalb $\lambda_1 \equiv \lambda_\zeta$ folgt. aufgrund der Eindeutigkeit Wir erhalten den Widerspruch

$$1 = \lambda_1(0) = \lambda_\zeta(0) = \zeta$$

weshalb unsere Annahme falsch war und

$$\lambda_\zeta(t) < 1 \quad \text{für alle } t \in I_\zeta$$

gelten muss. Da λ_ζ beschränkt ist, muss $I_\zeta = \mathbb{R}$ gelten. Durch Einschränkung von λ_ζ auf die positive Halbachse erhalten wir schließlich die gesuchte Funktion.