2.3 Aufgabe 3

Aufgabe 3:

(a) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Ist $f\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

(3+3 Punkte)

Zu (a)

Die Funktion erfüllt für ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$ die Cauchy-Riemann Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_x Re(f)(z) =& \partial_y Im(f)(z) \\ \partial_y Re(f)(z) =& -\partial_x Im(f)(z) \end{aligned}$$

Laut Voraussetzung sind Realteil und Imaginärteil identisch, so dass gilt

$$\begin{aligned} \partial_x Re(f)(z) =& \partial_y Re(f)(z) && (1) \\ \partial_y Re(f)(z) =& -\partial_x Re(f)(z) && (2) \end{aligned}$$

Durch Addition von (1) und (2) erhält man

$$2 \cdot \partial_y Re(f)(z) = 0 \implies \partial_y Re(f)(z) = 0$$

Setzt man die wiederum in (1) ein, so erhält man auch

$$\partial_x Re(f)(z) = 0$$

Da $z \in \mathbb{C}$ beliebig war, gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\partial_x Re(f)(z) = 0 = \partial_y Re(f)(z)$$

und die Funktion muss konstant sein. Da Real- und Imaginärteil gleich sind, hat f somit die Form

$$f(z) = c + ci \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}$$

Zu (b)

Jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist eine isolierte Singularität. Da die Funktion beschränkt ist, ist die Singularität nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz zudem hebbar. Somit gibt es eine holomorphe Fortsetzung

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$F(k) = \lim_{z \to k} f(z) \in \overline{f(\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z})}$$

Somit bleibt auch F beschränkt. Als beschränkte, ganze Funktion ist F nach dem Satz von Liouville konstant und daher auch f, da es durch Einschränkung von F auf $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$ zustande kommt.