2.2 Aufgabe 2

Aufgabe 2:

Es sei

$$f(z) = \frac{z-\pi}{\sin z} + z\exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

(a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von f und jeweils deren Typ.

(b) Berechnen Sie

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz.$$

(4+2 Punkte)

Zu (a)

f ist nicht definiert, falls $\sin(z) = 0$ gilt, also für $z = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Daher ist

$$f : \mathbb{C}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}\ ;\ z \mapsto \frac{z-\pi}{\sin(z)} + ze^{\frac{1}{z}}$$

holomorph mit den isolierten Singularitäten $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Wir betrachten die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{C}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}\ ;\ z \mapsto \frac{z-\pi}{\sin(z)} \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\ ;\ z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$$

da sich die Hauptteile der Laurentreihe addieren. Es gilt

$$\lim_{z\to k\pi} |f_1(z)| = \infty \qquad \text{für } k \in \mathbb{Z}\backslash\{1\}$$

Wegen

$$\sin(k\pi) = 0 \quad \text{und} \quad \big(\sin\big)'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

hat die Sinusfunktion bei $k\pi$ eine einfache Nullstelle. Somit existiert für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine holomorphe Funktion

$$h_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

so dass gilt

$$\forall z \in \mathbb{C} : \sin(z) = h_k(z)\cdot(z-k\pi) \quad \text{und} \quad h_k(k\pi) \neq 0$$

Für $k \neq 1$ gilt somit

$$\lim_{z\to k\pi} (z-k\pi)\cdot\frac{z-\pi}{\sin(z)} = \lim_{z\to k\pi} \frac{z-\pi}{h_k(z)} = \frac{k\pi-\pi}{h_k(k\pi)} \overset{*}{=} \frac{(k-1)\pi}{(-1)^k}$$

wobei $(*)$ gilt wegen

$$\cos(z) = \frac{d}{dz}\sin(z) = \big(h_k(z)\cdot(z-k\pi)\big)' = h_k'(z)\cdot(z-k\pi) + h_k(z) \implies (-1)^k = \cos(k\pi) = h_k(k\pi)$$

Somit hat f_1 bei $k\pi$ mit $k \neq 1$ eine Polstelle 1.Ordnung mit dem Residuum

$$Res(f_1, k\pi) = (-1)^k(k-1)\pi$$

Außerdem gilt

$$\lim_{z\to\pi} f_1(z) = \lim_{z\to\pi} \frac{z-\pi}{\sin(z)} = \lim_{z\to\pi} \frac{z-\pi}{h_1(z)\cdot(z-\pi)} = \frac{1}{h_1(\pi)} = \frac{1}{cos(\pi)} = -1$$

so dass f_1 bei π eine hebbare Singularität hat. Die Funktion f_2 hat die Laurentreihe um den Punkt 0

$$z \cdot \exp\left(\frac{1}{z}\right) = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{1-n}$$

und somit eine wesentliche Singularität bei 0, da $\frac{1}{n!} \neq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Der Koeffizient von $\frac{1}{z}$ entspricht dem Residuum, so dass gilt

$$Res(f_2, 0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

Wie bereits erwähnt addieren sich die Hauptteile der Laurentreihen von f_1 und f_2 in jeder isolierten Singularität von f.

- Betrachte $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0, 1\}$
  Da f_2 dort holomorph ist, stimmt der Hauptteil von f mit dem Hauptteil von f_1 überein. Somit hat auch f hier eine Polstelle 1.Ordnung mit

  $$Res(f, k\pi) = (-1)^k (k-1)\pi$$

- Betrachte π
  Hier ist f_1 hebbar und f_2 holomorph, weshalb auch f bei π hebbar ist und gilt

  $$Res(f, \pi) = 0$$

- 0
  Hier hat f_1 eine Polstelle 1.Ordnung mit

  $$Res(f_1, 0) = -\pi$$

  weshalb der Hauptteil der Laurentreihe von f_1 um 0 die Form

  $$-\frac{\pi}{z}$$

  hat. Der Hauptteil von f um 0 hat dementsprechend die Form

  $$-\frac{\pi}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{1-n}$$

  somit liegt hier eine wesentliche Singularität vor und es gilt

  $$Res(f, 0) = -\pi + \frac{1}{2}$$

Zu (b)

Definiere

$$\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \; ; \; t \mapsto 2e^{it}$$

dann ist Γ in $\mathbb{C}$ geschlossen, nullhomolog mit

$$\text{spur}(\Gamma) \cap \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$$

Nach dem Residuensatz gilt

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k\in\mathbb{Z}} Res(f, k\pi) \cdot n(\Gamma, k\pi) \overset{*}{=} 2\pi i \cdot Res(f, 0) = 2\pi i \Big(-\pi + \frac{1}{2}\Big)$$

Wobei $(*)$ gilt, da $k\pi$ für $|k| \geqslant 1$ in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\backslash\text{spur}(\Gamma)$ liegt, so dass die Umlaufzahl Null ist.