**Herbst 22 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)**

Es sei $D_R = [0,1] \times [0, R]$ für $R > 1$ und $f : D_R \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x(1-x)ye^{-y} \quad \text{für alle } (x, y) \in D_R$$

a) Zeigen Sie, dass $f$ ein globales Maximum und ein globales Minimum besitzt.

b) Bestimmen Sie alle Punkte in denen das globale Maximum angenommen wird.

c) Berechnen Sie das Integral

$$I_R := \int_{D_R} f(x, y)\ \mathrm{d}(x, y)$$

und den Grenzwert $\lim_{R\to\infty} I_R$.

**Lösungsvorschlag:**

a) Die Menge $D_R$ ist ein Produkt kompakter Intervalle, also selbst kompakt und $f$ ist als Verknüpfung stetiger Funktionen selbst stetig. Nach dem Satz von Minimum und Maximum existieren also globales Maximum und globales Minimum.

b) Wir starten mit der Bestimmung von Extrema im Innern der Menge $(0,1) \times (0, R)$, also durch Suche der Nullstellen des Gradienten

$$\nabla f(x, y) = ((1-2x)ye^{-y}, x(1-x)(e^{-y} - ye^{-y}))^{\mathrm{T}} = e^{-y}((1-2x)y, x(1-x)(1-y))^{\mathrm{T}}.$$

Damit dieser verschwindet, muss wegen der ersten Komponente $x = \frac{1}{2}$ gelten ($y = 0$ ist im Innern nicht möglich) und wegen der zweiten Komponente folgt $y = 1$. Der Funktionswert bei $(\frac{1}{2}, 1)$ ist $f(\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{4e}$. Wir werden zeigen, dass dieser Wert maximal ist und dass der Wert nur in diesem Punkt angenommen wird. Als nächstes betrachten wir den Rand der Menge $[0,1] \times \{0, R\} \cup \{0,1\} \times [0, R]$:
Für $x = 0, x = 1, y = 0$ ist die Funktion konstant 0, hier liegt also definitiv kein Maximum (das sind die globalen Minima, weil die Funktion nicht negativ ist), für $y = R$ erhalten wir $f(x, y) = f(x, R) = x(1-x)Re^{-R}$, was für $x = \frac{1}{2}$ maximal wird (quadratisches Polynom mit negativem Leitkoeffizienten und Nullstellen 0 und 1) und den Wert $\frac{R}{4e^R}$ hat.
Die Funktion $g : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{t}{4e^t} = \frac{1}{4}te^{-t}$ ist differenzierbar mit Ableitung $g'(t) = \frac{1}{4}(1-t)e^{-t}$, was genau für $t = 1$ verschwindet. Es gilt $\lim_{t\to 0} g(t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$, also muss die Funktion $g$ erst wachsen und dann fallen und bei 1 ein globales Maximum besitzen.
Das globale Maximum der Funktion muss entweder im Innern oder auf dem Rand liegen. Liegt es im Innern ist es stationär und daher der Punkt $(\frac{1}{2}, 1)$. Liegt es am Rand, muss es $y = R$ erfüllen und zudem $x = \frac{1}{2}$, ist also der Punkt $(\frac{1}{2}, R)$. Für

$R > 1$ ist $f(\frac{1}{2}, R) < f(\frac{1}{2}, 1)$, also muss der Punkt im Innern das globale Maximum sein, weil eines existiert. Außerdem ist das die einzige Stelle an der der globale Maximalwert angenommen wird.

c) Der Integrand ist stetig auf einer kompakten Menge, das Integral existiert also und der Satz von Fubini kann angewandt werden. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
I_R &= \int_0^1 \left( \int_0^R x(1-x)ye^{-y}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left( x(1-x) \int_0^R ye^{-y}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^R ye^{-y}\mathrm{d}y = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \cdot \left[ -(y+1)e^{-y} \right]_0^R \\
&= (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \cdot (1 - (R+1)e^{-R}) = \frac{1}{6} - \frac{R+1}{6e^R},
\end{aligned}$$

was für $R \to \infty$ gegen $\frac{1}{6}$ konvergiert, da nach der zweiten Regel von l'Hospital

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R+1}{6e^R} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{6e^R} = 0$$

gilt, welche anwendbar ist, weil Zähler und Nenner beide gegen $+\infty$ divergieren, stetig differenzierbare Funktionen sind und der Nenner sowie seine Ableitung keine Nullstellen besitzt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$