1.5 Aufgabe 5

Aufgabe 5:

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = (1 - x^2)\, e^{\sin x}, \quad x(0) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte, maximale, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

(b) Zeigen Sie für die Lösung x aus (a), dass die Grenzwerte $\lim_{t\to\pm\infty} x(t)$ existieren, und bestimmen Sie diese.

(c) Bestimmen Sie für die Lösung x aus (a) das Taylorpolynom der Ordnung 2 um den Punkt $t = 0$.

(2+2+2 Punkte)

Zu (a)

Definiere die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; x \mapsto (1 - x^2)e^{\sin(x)}$$

Diese ist stetig differenzierbar und somit gibt es nach dem Satz von Picard-Lindelöf für jedes $\zeta \in \mathbb{R}$ eine eindeutige maximale Lösung

$$\lambda_\zeta : I_\zeta \to \mathbb{R}$$

von dem Anfangswertproblem

$$x' = f(x) \quad x(0) = \zeta$$

Wegen

$$f(1) = 0 = f(-1)$$

sind durch

$$\lambda_{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; t \mapsto -1 \quad \text{und} \quad \lambda_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; t \mapsto 1$$

maximale Lösungen von

$$x' = f(x) \quad x(0) = -1 \quad \text{bzw.} \quad x(0) = 1$$

definiert. Wegen

$$\lambda_{-1}(0) < \lambda_0(0) < \lambda_1(1)$$

sind die Graphen von $\Gamma(\lambda_{-1})$, $\Gamma(\lambda_0)$ und$\Gamma(\lambda_1)$ paarweise disjunkt. Somit gilt

$$\Gamma(\lambda_0) = \left\{ \big(t, \lambda_0(t)\big) : t \in I_0 \right\} \subseteq \mathbb{R} \times]-1, 1[$$

Denn wäre $\lambda_0(s) \geqslant 1$ für ein $s \in I_0$, dann gäbe es nach dem Zwischenwertsatz ein $\tau \in I_0$ mit

$$\lambda_0(\tau) = 1 = \lambda_1(\tau)$$

Somit wäre

$$1 \in \Gamma(\lambda_0) \cap \Gamma(\lambda_1)$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass die Graphen disjunkt sind und folglich muss $\lambda_0(t) < 1$ für alle $t \in I_0$ gelten. Analog zeigt man, dass $-1 < \lambda_0(t)$ für alle $t \in I_0$ gelten muss. Setzte nun

$$I_0 =]a, b[\text{ für } a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \text{ und } a < 0 < b$$

Wäre $b < \infty$, so ist

$$\Gamma_b(\lambda_0) = \Big\{\big(t, \lambda_0(t)\big) : t \in [0, b[\Big\} \subseteq [0, b[\times] -1, 1[$$

relativ kompakt in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, was der Charakterisierung von λ_0 als maximale Lösung widerspricht. Somit muss $b = \infty$ gelten. Analog zeigt man $a = -\infty$. Dies zeigt, dass die maximale Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Zu (b)

Aus (a) wissen, wir dass gilt

$$-1 < \lambda_0(t) < 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

Somit gilt für die Ableitung

$$\lambda_0'(t) = \big(1 - \lambda_0(t)^2\big) \cdot e^{\sin\big(\lambda_0(t)\big)} > 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

und λ_0 ist streng monoton steigend. Da die Abbildung zudem beschränkt ist, existieren die Grenzwerte

$$c := \lim_{t \to -\infty} \lambda_0(t) \quad \text{und} \quad \mathrm{d} := \lim_{t \to \infty} \lambda_0(t)$$

und es gilt $c, d \in [-1, 1]$. Wir möchten nun zeigen, dass gilt

$$c = \lim_{t \to -\infty} \lambda_0(t) = -1 \quad \text{und} \quad \mathrm{d} = \lim_{t \to \infty} \lambda_0(t) = 1$$

Zunächst nehmen wir an, $d < 1$ würde gelten. Dann gilt:

$$\forall s \in [0, \infty[: \quad 0 < \lambda_0(s) \leqslant d < 1$$

Da die Sinusfunktion auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ größer gleich Null und die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist, gilt

$$1 = e^0 = e^{\sin\big(\lambda_0(0)\big)} \leqslant e^{\sin\big(\lambda_0(s)\big)} \leqslant e^{\sin(d)}$$

Somit gilt für $t > 0$

$$\lambda_0(t) = \int_0^t \lambda_0'(s) ds = \int_0^t \big(1 - \lambda_0(s)^2\big) \cdot e^{\sin\big(\lambda_0(s)\big)} ds \geqslant \int_0^t (1 - d^2) ds = t(1 - d^s) \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$$

Dies steht im Widerspruch zu $\lambda_0(t) < 1$, weshalb unsere Annahme falsch war und $d = 1$ gelten muss. Nehmen wir nun an, dass $-1 < c$ gilt, dann gilt:

$$\forall s \in] -\infty, 0] : \quad -1 < c \leqslant \lambda_0(s) \leqslant 0$$

Da die Sinusfunktion auf $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ kleiner gleich Null und die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist, gilt

$$e^{\sin(c)} \leqslant e^{\sin\big(\lambda_0(s)\big)} \leqslant e^{\sin\big(\lambda_0(0)\big)} = 1$$

Somit gilt für $t > 0$

$$\lambda_0(t) = \int_0^t \lambda_0'(s) ds = -\int_t^0 \big(1 - \lambda_0(s)^2\big) \cdot e^{\sin\big(\lambda_0(s)\big)} \leqslant -|t| \cdot (1 - c^2) e^{\sin(c)} \xrightarrow[t \to -\infty]{} -\infty$$

Dies steht im Widerspruch zu $-1 < \lambda_0(t)$, weshalb unsere Annahme falsch war und $c = -1$ gelten muss.

Zu (c)

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung um den Entwicklungspunkt 0 hat die Form

$$\lambda_0(0) + \lambda_0'(0) \cdot t + \frac{\lambda_0''(0)}{2} \cdot t^2$$

Es gilt

$$\lambda_0(0) = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_0'(0) = \left(1 - \lambda_0(0)^2\right) \cdot e^{\sin\left(\lambda_0(0)\right)} = 1$$

Zudem erhält man durch Ableiten

$$\begin{aligned} \lambda_0''(t) &= -2\lambda_0(t) \cdot \lambda_0'(t) e^{\sin\left(\lambda_0(t)\right)} + \left(1 - \lambda_0(t)^2\right) \cdot e^{\sin\left(\lambda_0(t)\right)} \cdot \cos\left(\lambda_0(t)\right) \cdot \lambda_0'(t) \\ \Longrightarrow \lambda_0''(0) &= -2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot e^{\sin(0)} + 1 \cdot e^{\sin(0)} \cdot \cos(0) \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Somit ist das Taylorpolynom 2. Ordnung geben durch

$$t + \frac{t^2}{2}$$