1.4 Aufgabe 4

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die maximale Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + e^{x_2} x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2^2, \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_2 x_3 \end{aligned}$$

zu folgender Anfangsbedingung:

$$\text{(a)} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass in den Anfangsdaten jeweils eine Komponente gleich 0 ist.

(3+3 Punkte)

Definiere zunächst die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \; ; \; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + e^{x_2} x_3 \\ x_1 x_2^2 \\ x_3 + x_2 x_3 \end{pmatrix}$$

f ist offensichtlich stetig differenzierbar, weshalb für jedes $\zeta \in \mathbb{R}^3$ das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \zeta$$

nach dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf eine eindeutige maximale Lösung

$$\lambda_\zeta : I_\zeta \to \mathbb{R}^3$$

besitzt.

Zu (a)

Wir machen den Ansatz

$$\lambda_2 \equiv 0$$

Somit erhält man die homogene Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile wird offensichtlich gelöst durch

$$\lambda_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; t \mapsto e^t$$

Setzt man dies wiederum in die erste Zeile ein, so erhält man das Anfangswertproblem

$$x_1' = x_1 + e^t \quad x_1(0) = 1$$

Durch Variation der Konstanten erhält man

$$\lambda_1(t) = e^t \cdot \left(1 + \int_0^t \frac{e^s}{e^s} ds\right) = e^t \cdot \left(1 + \int_0^t ds\right) = e^t \cdot (1+t)$$

Wir behaupten daher, dass durch

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \ ; \ t \mapsto \begin{pmatrix} e^t(1+t) \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Anfangswertproblems definiert ist. Dies überprüfen wir

$$\lambda(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\lambda'(t) = \begin{pmatrix} e^t + t + e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) + e^{\lambda_2(t)}\lambda_3(t) \\ \lambda_1(t)\lambda_2(t)^2 \\ \lambda_3(t) + \lambda_2(t)\lambda_3(t) \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{pmatrix} = f\big(\lambda(t)\big)$$

Da die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, ist sie zudem maximal.

Zu (b)

Analog zu (a) machen wir den Ansatz Wir machen den Ansatz

$$\lambda_3 \equiv 0$$

Wir erhalten das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 x_2^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die erste Zeile wird offensichtlich gelöst durch

$$\lambda_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ t \mapsto e^t$$

Dies setzen wir in die zweite Zeile ein und erhalten

$$x_2' = x_2^2 e^t \quad x_2(0) = 1$$

Diese Gleichung kann durch Trennen der Variablen gelöst werden.

$$\int_1^{\lambda_2(t)} \frac{dx}{x^2} = \int_0^t e^s ds \implies -\frac{1}{x}\bigg|_1^{\lambda_2(t)} = e^t - 1 \implies -\frac{1}{\lambda_2(t)} + 1 = e^t - 1 \implies \frac{1}{\lambda_2(t)} = 2 - e^t$$

Somit setzen wir

$$\lambda_2 :]-\infty, \ln(2)[\to \mathbb{R} \ ; \ t \mapsto \frac{1}{2 - e^t}$$

und behaupten, dass durch

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} :]-\infty, \ln(2)[\to \mathbb{R} \ ; \ t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ \frac{1}{2-e^t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine maximale Lösung definiert ist. Dies überprüfen wir.

$$\lambda(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zudem gilt

$$\lambda'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \frac{e^t}{(2-e^t)^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) + e^{\lambda_2(t)}\lambda_3(t) \\ \lambda_1(t)\lambda_2(t)^2 \\ \lambda_3(t) + \lambda_2(t)\lambda_3(t) \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{pmatrix} = f\big(\lambda(t)\big)$$

Wegen

$$\lim_{t \to \ln(2)} \left| \frac{1}{2-e^t} \right| = \infty$$

Gilt auch

$$\lim_{t \to \ln(2)} ||\lambda(t)|| = \infty$$

und man sieht, dass die Lösung nicht fortsetzbar ist.