1.3 Aufgabe 3

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie $\sup\{|\cos z| \mid z \in \mathbb{C}\}$,

(a) indem Sie einen geeigneten Satz der Funktionentheorie anwenden, also insbesondere ohne die Funktionswerte von $|\cos z|$ zu betrachten,

(b) indem Sie für $R > 0$ zeigen, dass die Funktion $f(z) = |\cos z|$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ ihr Maximum annimmt, und diesen Wert sowie sein Verhalten für $R \to \infty$ bestimmen.

(2+4 Punkte)

Zu (a)

Wegen

$$\cos(0) = 1 \quad \text{und} \quad \cos(\pi) = -1$$

ist

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \; ; \; z \mapsto \cos(z)$$

eine nicht-konstante ganze Funktion. Nach dem kleinen Satz von Picard gilt somit für die Bildmenge

$$\cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \quad \text{oder} \quad \cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\backslash\{\zeta\} \text{ für ein } \zeta \in \mathbb{C}$$

Folglich gilt

$$\sup\{|cos(z)| : z \in \mathbb{C}\} = \infty$$

Zu (b)

Definiere für jedes $R > 0$ die Mengen

$$U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \quad \text{und} \quad \overline{U}_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R\}$$

Die Einschränkung des Cosinus auf $\overline{U}_R$ ist stetig und in U_R holomorph. Nach dem Maximumsprinzip für beschränkte Gebiete nimmt die Funktion

$$f : \overline{U}_R \to \mathbb{R} \; ; \; z \mapsto |\cos(z)|$$

ihr Maximum auf dem Rand, d.h. auf der Menge

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$$

an. Wegen

$$|\cos(iR)| = \left| \frac{e^{i(iR)} + e^{-i(iR)}}{2} \right| = \frac{e^{-R} + e^{R}}{2}$$

gilt

$$\max\{|\cos(z)| : |z| \leqslant R\} \geqslant \frac{e^R}{2} \longrightarrow \infty \text{ für } R \to \infty$$

und somit auch

$$\sup\{|cos(z)| : z \in \mathbb{C}\} = \infty$$